

Geschlossen am 25. Februar 1896.

1896.

N: 3.

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE

BAND 57. HEFT 3.

DER GANZEN FOLGE 203. BANDES 3. HEFT

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT ZU BERLIN

UND INSERENDEN VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON


G. UND E. WIEDEMANN.



LEIPZIG, 1896.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

(ARTHUR MEINER.)

 Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 36 M.

Inhalt.

	Seite
1. J. Elster u. H. Geitel. Ueber den Einfluss des Lichtes auf die Form der Entladung einer Influenzmaschine	401
2. E. Aschkinass. Zur Widerstandsänderung durch electrische Bestrahlung	408
3. J. v. Geitler. Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen. II. Mittheilung	412
4. V. v. Lang. Interferenzversuch mit electricischen Wellen	430
5. H. Pflaum. Ueber einen Crookes'schen Apparat	448
6. E. Wiedemann u. G. C. Schmidt. Fluorescenz des Natrium- und Kaliumdampfes und Bedeutung dieser Thatsache für die Astrophysik	447
7. E. Wiedemann u. G. C. Schmidt. Entladungserscheinungen in verdünnten Metalldämpfen	454
8. L. Zehnder. Eine allgemeine Gedächtnisregel für Richtungsbestimmungen im electromagnetischen Felde	459
9. W. Holtz. Ein älteres Analogon zu den Röntgen'schen Strahlungsversuchen	462
10. P. Beck. Theorie des remanenten Magnetismus von Föppl	464
11. F. v. Hefner-Alteneck. Apparat zur Beobachtung und Demonstration kleiner Luftdruckschwankungen („Variometer“)	468
12. M. Toepler. Ueber Beobachtungen von Windwogen	472
13. E. Zermelo. Ueber einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie	485
14. E. H. Loomis. Ueber den Gefrierpunkt verdünnter wässeriger Lösungen	495
15. E. H. Loomis. Besprechung einiger Einwände, die gegen meine Methode der Bestimmung des Gefrierpunktes verdünnter Lösungen erhoben wurden	521
16. F. Schütt. Innerer Bau und optisches Verhalten der Lippmann'schen Photographien in natürlichen Farben	533
17. R. König. Zur Frage über den Einfluss der Phasendifferenz der harmonischen Töne auf die Klangfarbe	555
18. F. Wittenbauer. Theorie der Schubspannungen und der spannungslosen Geraden	567

Anderweiteriger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.



PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 57.

1. *Ueber den Einfluss des Lichtes auf
die Form der Entladung einer Influenzmaschine;
von J. Elster und H. Geitel.*

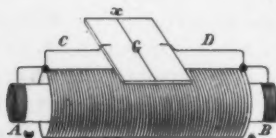
Vor einigen Jahren haben wir in diesen Annalen¹⁾ die Anordnung eines lichtelectrischen Versuches beschrieben, in welchem die zwischen einer Kugel als positiver und einer Scheibe als negativer Electrode übergehenden Büschel und Funken einer Holtz'schen Maschine durch Bestrahlung der Kathode mit kurzwelligem Lichte zum Verschwinden gebracht werden. Die hierzu erforderliche Vorrichtung ist sehr einfach. Man setzt auf die negative Polstange der Maschine eine Hohl-scheibe aus Zinkblech, deren Vorderfläche durch Verreiben eines Quecksilbertropfens mittelst eines mit verdünnter Schwefel-säure angefeuchteten Leinenlappens amalgamirt und nach Ab-spülen mit Wasser durch Reiben mit Seidenpapier getrocknet ist. Zieht man nun die mit Kugel versehene positive Polstange soweit zurück, dass bei thätiger Maschine kräftige Zickzack-funken überschlagen oder dass, wenn man die Condensatoren entfernt hat, ein Büschel unter prasselndem Geräusche gegen die Zinkplatte ausströmt und zündet dann in der Nähe ein Stück Magnesiumband an, so erlischt, sobald das helle Licht die negative Polfläche trifft, der Funkenstrom augenblicklich und das Ausströmungsgeräusch des Büschels verschwindet, um sofort wieder einzusetzen, wenn die Kathode nicht mehr vom Lichte getroffen wird. Der Versuch, schon dadurch auffallend, dass das lebhafte Funken- und Büschelspiel der Maschine während der Dauer der Belichtung einer völligen Stille Platz macht, erscheint noch sonderbarer, wenn man erwägt, dass

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **30**. p. 332. 1890.

in diesem Falle die Bestrahlung der Kathode das Gegentheil von dem bewirkt, was man nach sonstigen Erfahrungen erwarten sollte. Statt einer Erleichterung der Entladung tritt nämlich anscheinend eine Art von Hemmung ein.

Noch deutlicher wird dieser Einfluss des Lichtes, wie wir l. c. zeigten, dadurch gemacht, dass man parallel zu der zu belichtenden Funkenstrecke eine zweite zwischen Messingkugeln so einrichtet, dass im Dunkeln die Entladung eben die erstere bevorzugt. Unter der Einwirkung des Magnesiumlichtes auf die Zinkkathode verlässt dann die Entladung die erstere Strecke und springt auf die zweite über. Will man den Begriff „Widerstand einer Gasstrecke“ auch bei Funkenentladungen anwenden, so kann man diese Thatsache kurz so ausdrücken, dass die Belichtung der Kathode aus amalgamirtem Zink den Widerstand der Funkenstrecke vermehrt.

Das in dieser Fassung besonders hervortretende paradoxe Ergebniss veranlasste uns dazu, die Untersuchung der Erscheinung von neuem aufzunehmen; wir erlauben uns, im Folgenden darüber Bericht zu erstatten.



Die erste Vermuthung, die sich bei der Vergleichung des Versuches mit anderen lichtelectrischen Vorgängen aufdrängt, ist die, dass unter dem Einflusse des Lichtes die sichtbare und hörbare

Entladung durch eine still verlaufende abgelöst wird. Die Abwesenheit jedes Ausströmungsgeräusches weist darauf hin, dass diese Entladungsform entweder stetig verläuft, oder dass die etwa vorhandenen Intensitätsschwankungen, sei es wegen grosser Frequenz oder zu geringer Amplitude keine Tonbildung mehr bewirken können. Um zunächst das Ohr in der Auffassung der gröberen Discontinuitäten zu unterstützen, schalteten wir in den Kreis der Maschine ein Telephon von der Art ein, wie es von den Hrn. E. Wiedemann und Ebert zu ähnlichen Versuchen verwandt ist. Wie zu erwarten war, schwieg das Telephon während der Dauer der Belichtung, erst nach Ablauf derselben trat ein kräftiger Ton, zugleich mit dem wieder einsetzenden Büschel auf. Trotzdem

konnte indessen die Entladung noch discontinuirlich sein, wenn ihre Schwingungszahl über die Grenze der Hörbarkeit oder der Resonanzfähigkeit der Telephonplatte hinausging. Um nun Stromdiscontinuitäten von sehr kleiner Periode zu entdecken, benutzen wir die in der Figur dargestellte Vorrichtung. Ein Ebonitrohr von etwa 6 cm Länge ist an beiden Enden mit kurzen Metallfassungen *A* und *B* versehen, und kann mit Reibung auf eine Polstange der Maschine aufgeschoben werden. Auf das Rohr ist in mehreren durch Wachstaffet voneinander isolirten Lagen ein überspannter Kupferdraht von 0,2 mm Dicke in einigen Hundert Windungen aufgewickelt, die Enden dieser Spirale sind an die Metallfassungen *A* und *B* angelöthet. Von denselben Fassungen aus führen zwei Drähte *C* und *D* zu einem kleinen versilberten Glasstreifen *G*, dessen Metallbelag — wie bei den Resonatoren des Hrn. A. Righi, — durch einen Diamantstrich *x* in zwei getrennte Theile zerschnitten ist. Der Contact zwischen dem Silber und den Drähten *C* und *D* wird durch ein Stückchen aufgeklebten unechten Goldschumes sicherer gemacht. Schiebt man nun das Rohr bei *A* so auf die positive Polstange, dass diese nur wenig in das Innere hineinragt und setzt bei *B* mittels eines passenden cylindrischen Metallstückes die Kugel auf, so wird jede *continuirliche* Entladung den Weg durch die Drahtspirale nehmen, die Unterbrechungsstelle im Silberbelage bleibt dunkel. Sobald aber Discontinuitäten oder Stromstösse eintreten, wächst die Selbstinduction der Spirale so an, dass Funken bei *x* erscheinen. Nachdem daher der kleine Apparat auf die positive Polstange gesetzt ist, wird die Zinkkathode mit Magnesiumlicht beleuchtet und dann die Maschine in Thätigkeit gesetzt. Es sind, so lange das Licht einwirkt, *keine* Fünkchen bei *x* sichtbar, sie treten natürlich sofort auf, zugleich mit der Funken- und Büschelbildung an der Anodenkugel, sobald die Belichtung unterbrochen wird. Hierbei wird dann die Trennungsstelle *x* durch Corrosion so erweitert, dass die Empfindlichkeit des Schwingungsanzeigers dadurch stark herabgesetzt wird. Man hat daher vor jedem neuen Versuche eine frisch präparirte Righi'sche Silberglasplatte einzusetzen.

Der experimentelle Befund würde demnach der Annahme nicht im Wege sein, dass unter dem Einflusse des Lichtes

die Entladung der Maschine in eine continuirliche übergeführt wird, zum mindesten wäre zu schliessen, dass die Dauer oder die Amplitude der Schwingungen im Lichte so klein wird, dass sie sich der Beobachtung auch durch das beschriebene Hilfsmittel entziehen.

Soll man sich nun aber vorstellen, dass diese neue Form der Entladung allein in der photoelectrischen Ueberführung negativer Electricität von der Zinkkathode zur Anode besteht? Diese Annahme erscheint bedenklich, wenn man berücksichtigt, wie gering die Electricitätsmengen sind, die in Luft unter Atmosphärendruck auf diese Weise übertragen werden.

Es ist daher zu vermuthen, dass die an der *Kathode* auftretende photoelectrische Zerstreuung auch die Form der Entladung an der *Anode* ändert, sodass eine im ganzen stetig verlaufende an Stelle der Funken- und Büschelbildung tritt. Als solche kann von bekannten Formen nur noch die Glimmentladung in Betracht kommen.

Da das Magnesiumlicht nur die *Kathodenfläche* treffen muss, so wird sich bei geeigneten Schutzmaassregeln gegen seinen grellen Glanz ein etwa an der *Anode* auftretender electrischer Leuchtvorgang direct beobachten lassen. Beschattet man das Auge durch einen vorgehaltenen Schirm und betrachtet die ebenfalls im Schatten gehaltene Anodenkugel gegen einen schwarzen Hintergrund, so sieht man in der That, dass, sobald die Zinkkathode vom Lichte bestrahlt wird, die soeben noch aus der Anode hervorbrechenden Büschel und Funken einer Schicht violetten Glimmlichtes Platz machen. Die Erscheinung ist um so lichtstärker, je kleiner man die Anodenkugel wählt, zuweilen bleibt die Glimmentladung eine merkliche Zeit über die Dauer der Belichtung hinaus bestehen. Viel leichter wird die Beobachtung dieses Glimmens der Anode, wenn man anstatt des brennenden Magnesiums eine Flamme von Schwefelkohlenstoff, die mit Sauerstoff angeblasen wird, als Lichtquelle verwendet. Bekanntlich ist diese sehr reich an kurzwelligen Strahlen, ohne dabei das Auge zu blenden, man kann daher in aller Bequemlichkeit den Wechsel der Entladungsform beobachten, der in dem Momente eintritt, indem man ihren Strahlen den Weg zur Zinkfläche frei gibt. Allerdings muss die Flamme unter einem gut wirkenden Abzuge aufgestellt

werden, da die von ihr ausgestossene schweflige Säure der Thätigkeit der Maschine sehr bald ein Ende machen würde.

Bemerkenswerth ist ferner, dass der geschilderte Wechsel der Entladungsform nur dann zu Stande kommt, wenn die Anode von den von der Kathode ausgehenden negativ electrischen Gastheilchen wirklich getroffen wird. Schaltet man während der Bestrahlung eine durchlochte Glasplatte oder ein mit kleiner Oeffnung versehenes Blatt paraffinirten Papiers zwischen Anode und Kathode ein, so bilden sich an der ersten sofort wieder die Büschel und Funken aus. Ein zwischen Anode und Kathode eingeschobenes, zur Erde abgeleitetes Drahtnetz stört dagegen das photoelectrisch erregte Glimmlicht nicht. Man hat daher anzunehmen, dass die von der Kathode ausgehenden electrischen Gastheilchen durch die Maschen des Netzes gehen, ohne dabei ihre Ladung völlig abzugeben. Dies Ergebniss stimmt durchaus mit älteren Versuchen von Hrn. W. Giese und neueren von Lord Kelvin überein. Zu der experimentellen Anordnung ist zu bemerken, dass das Drahtnetz innerhalb eines metallischen Ringes ausgespannt sein muss, dessen Peripherie keine Hervorragungen enthält, von denen electrische Büschel gegen die benachbarten Electroden der Maschine ausgehen könnten.

Es liegt nahe, eine Analogie des in Rede stehenden Versuches mit dem Verfahren zu erkennen, das Hr. Holtz¹⁾ anwendet, um die Glimmentladung hervorzurufen und dauernd zu erhalten. Danach kann man bekanntlich das Glimmen der Anodenkugel und der Kathodenscheibe dadurch erreichen, dass man die letztere mit einer Schicht von Seidenzeug oder mehreren Lagen Seidenpapiers bedeckt. Dieser Ueberzug spielt wohl die Rolle, die Entladung an der betreffenden Electrode zugleich in sehr vielen Punkten einzuleiten und sie dadurch über eine grössere Fläche zu verbreiten; ganz dasselbe muss aber auch bei der Beleuchtung der Zinkkathode durch ultravioletes Licht eintreten.

Die Vergrösserung des Widerstandes der Luftstrecke kann, nachdem der Wechsel der Entladungsform im Lichte festgestellt ist, nichts Befremdendes mehr bieten. Ist es doch

1) W. Holtz, Carls Rep. 17. p. 402. 1880.

keineswegs zu erwarten, dass unter sonst gleichen Umständen die verschiedenen Arten der Entladung gleiche Electricitätsmengen überführen werden. Doch haben wir, um über die Thatsache selbst keine Zweifel zu lassen, ausser der schon erwähnten Einschaltung einer parallelen Funkenstrecke noch zwei weitere Versuche angestellt. Wir verbanden die eine Belegung einer isolirten Lane'schen Maassflasche mit dem negativen Pole der Maschine, die andere mit der amalgamirten Zinkscheibe, während die positive Polkugel der letzteren in der Entfernung von einigen Centimetern gegenüberstand. Wurde die Maschine unter Ausschaltung ihrer Condensatoren in Thätigkeit gesetzt, so bildete sich an der Unterbrechungsstelle der Büschel aus, im Lichte verschwand er. Gleichzeitig konnte man, während die Maschine gleichförmig weiter gedreht wurde, die Entladungen der Maassflasche in gleichen Zeiträumen sowohl im Lichte wie im Dunkeln zählen. Es zeigte sich, dass sie etwas langsamer während der Belichtung der Kathode erfolgten, d. h. dass im Lichte bei Glimmentladung weniger Electricität durch die Luftstrecke ging, als im Dunkeln durch den Büschel übertragen wird. Hieraus folgt weiter, dass im Lichte die Potentialdifferenz der Electroden steigen muss. Wir wiesen dies direct durch ein kleines Korkkugelpendel nach, das an einem in eine Kugel endigenden Stabe auf die Electroden aufgesetzt wurde. Dieses gab bei Beleuchtung der Kathode eine kleine Zunahme des Potentials zugleich mit dem Verschwinden des Büschels an und zwar deutlicher am negativen als am positiven Pole.

Hiernach wird durch das im Lichte eingeleitete Glimmen der Anode in der That weniger Electricität in Bewegung gesetzt, als durch den im Dunkeln auftretenden Büschel. Die Frage liegt nahe, ob sich hierin, wie oben angedeutet, nur ein vom Lichte unabhängiger Unterschied der beiden Entladungsformen ausdrückt. Die Entscheidung ist deshalb schwierig, weil man ohne die Electroden zu verändern und ohne Anwendung des Lichtes, die Entladungsformen nicht willkürlich ineinander überführen kann. Doch glauben wir, es als wahrscheinlich hinstellen zu dürfen, dass die Frage zu bejahen ist. Wählt man nämlich als Anode eine feine Spitze, sorgt also dafür, dass an ihr schon im Dunkeln die Glimmentladung auftreten muss, so zeigt sich nun *kein* Unterschied mehr im

Widerstände der Luftstrecke zwischen ihr und der Zinkscheibe, mag diese beleuchtet sein oder nicht. Hieraus schliessen wir, dass eine von der Form der Entladung unabhängige Vermehrung des Widerstandes im Lichte nicht vorhanden ist. Auch in unserer früheren Mittheilung hatten wir erwähnt, dass eine schon bestehende Glimmentladung durch das Licht nicht beeinflusst wird.

Die Hauptergebnisse der beschriebenen Versuche fassen wir kurz so zusammen:

Die zwischen einer Kathodenscheibe aus amalgamirtem Zink und einer Anodenkugel aus beliebigem Metalle übergehenden Büschel und Funken einer Holtz'schen Maschine werden, solange die Kathode mit kurzwelligem Lichte bestrahlt wird, durch die Glimmentladung verdrängt, dabei wird durch die letztere, also während der Belichtung, eine kleinere Electricitätsmenge übergeführt, als im Dunkeln durch die Büschel und Funken.

Wolfenbüttel, im Januar 1896.

2. Zur Widerstandsänderung durch electriche Bestrahlung; von E. Aschkinass.

Im November 1894 berichtete ich in der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin über Widerstandsänderungen, die ich an Stanniolgittern und anderen metallischen Leitern beobachtet hatte, nachdem dieselben einer electriche Strahlung ausgesetzt waren.¹⁾ Erst nach Abschluss meiner eigenen Arbeit wurden mir die Untersuchungen Branly's²⁾ bekannt, nach denen gewisse Substanzen, vor allem Metallfeilicht, eine Widerstandsverminderung erleiden, wenn in der Nähe electriche Funken zu Stande kommen. Ich musste es damals noch dahingestellt sein lassen, ob beide Erscheinungen miteinander identisch wären.³⁾

Inzwischen hat Hr. Mizuno⁴⁾ meine Beobachtungen an Stanniolgittern bestätigt und dabei die Wahrnehmung gemacht, dass die Widerstandsverminderung nicht zu Stande kommt, wenn ein grösserer Zwischenraum zwischen den einzelnen Gitterstreifen vorhanden ist. Er schloss hieraus, dass die Erscheinung „nicht auf einem molecularen, sondern auf einem rein mechanischen“ Vorgange beruhe. Die wirksamen Gitter sind nämlich in der Weise hergestellt, dass ein Blatt Stanniol durch feine parallele Schnitte in eine grössere Anzahl schmaler Streifen zerlegt wird, deren Gesammtheit der electriche Strom in Zickzackwindungen durchlaufen muss. Die Gitter werden entweder auf einem Rahmen befestigt, oder das Stanniolblatt wird bereits vorher mit seiner ganzen Fläche auf eine Unterlage geklebt. Die Schnitte lassen sich nun niemals völlig geradlinig führen, auch wenn man ein noch so scharfes Messer

1) E. Aschkinass, Verhandl. d. Phys. Gesch. zu Berlin. Jahrg. 13. 4. p. 103. 1894.

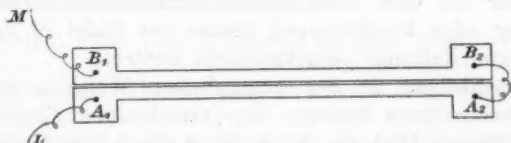
2) E. Branly, Compt. rend. 111. p. 785. 1890; 112. p. 90. 1891; Lumière él. 40, p. 301 u. 506. 1891.

3) E. Aschkinass, l. c. p. 110.

4) T. Mizuno, Journ. of the Coll. of Science, Imp. Univ., Tokyo, 9. (1). p. 1. 1895; Phil. Mag. 40. p. 497. 1895.

anwendet, vielmehr erscheinen die Ränder der einzelnen Streifen schon unter dem Mikroskope mit losen Metallpartikeln besetzt. Nach Hrn. Mizuno sollen die electrischen Wellen eine Bewegung dieser Theilchen hervorrufen der Art, dass mehrfache Ueberbrückungen an den Einschnitten zu Stande kommen, wodurch sich dann die Verminderung des gesammten Widerstandes erklären würde, sodass man es hier wohl mit demselben Phänomen zu thun hätte, das bei dem Metallfeilicht beobachtet wird. Zu diesem Resultat ist bald darauf auch Hr. Haga¹⁾ gelangt.

Ich selbst will im Folgenden einige Beobachtungen mittheilen, welche beweisen, dass die Widerstandsänderung der Stanniolgitter durch Vorgänge an den Einschnitten zu Stande kommt, also in der That mit dem von Branly zuerst entdeckten Phänomen identisch ist.



Ein Stück Stanniol, das auf Cartonpapier oder Glas aufgeklebt war, wurde mit einem scharfen Messer der ganzen Länge nach durchgeschnitten (vgl. Fig.) An den vier Enden A_1, A_2, B_1, B_2 der beiden dadurch entstandenen Streifen wurden Klemmschrauben befestigt. Zunächst wurden A_2 und B_2 durch einen kurzen Draht miteinander verbunden und zu A_1 und B_1 die Zuleitungen L und M geführt, mittels welcher das Ganze in eine Wheatstone'sche Brückencombination eingeschaltet wurde. Der Strom lief also von A_1 über A_2 und B_2 nach B_1 . Unter dem Einfluss electrischer Wellen konnte nun gerade wie früher das Auftreten einer dauernden Widerstandsverminderung beobachtet werden, die sich durch eine geringe mechanische Erschütterung wieder aufheben liess. Darauf wurde die Drahtverbindung $A_2 B_2$ entfernt und die Zuleitung M an die Klemme A_2 gelegt. Dadurch war also nur der Streifen $A_1 A_2$ in den Stromkreis eingeschaltet. Bei dieser Anordnung

1) H. Haga, Wied. Ann. 56. p. 571. 1895.

liess sich keine Einwirkung der electricischen Wellen wahrnehmen; ebensowenig, als der Streifen $B_1 B_2$ allein eingeschaltet wurde. Die Widerstandsänderung kommt also weder in der Masse des Stanniols selbst noch an den Contacten A_1, A_2, B_1, B_2 zu Stande.

Die Zuleitungen L und M wurden jetzt wieder an A_1 und B_1 gelegt, und die Verbindung $A_2 B_2$ wiederhergestellt, das Ganze mit einem empfindlichen Galvanometer zu einem Kreise geschlossen, der von einem schwachen Strome durchlaufen wurde. Die Ablenkung der Magnetnadel erhielt durch passende Wahl der Stromstärke eine geeignete Grösse. Hierauf wurde die Verbindung $A_2 B_2$ aufgehoben, und nun konnte der Strom natürlich nicht mehr circuliren. Sobald aber in der Nähe electricische Wellen zu Stande kamen, schlug die Nadel aus und nahm eine neue Gleichgewichtslage ein. Der Strom lief also quer von dem einen Streifen zum andern. Durch Erwärmung oder Erschütterung konnte die Nadel in ihre ursprüngliche Ruhelage zurückgebracht werden.

Verschiedene in der angegebenen Weise hergestellte Stanniolwiderstände besaßen eine verschiedene Empfindlichkeit. Indessen blieb die Erscheinung gänzlich aus, wenn der Zwischenraum zwischen den zwei Streifen zu gross war. Je grösser übrigens die Empfindlichkeit für electricische Schwingungen ist, eine um so geringere Erschütterung reicht hin, um die Galvanometernadel auf ihren Nullpunkt zurückzubringen.

Aus diesen Versuchen geht wohl zweifellos hervor, dass die von mir früher beobachteten Widerstandsänderungen der Stanniolgitter durch Querleitung zwischen den einzelnen Streifen zu Stande kommen, dass man es demnach hier mit demselben Phänomen zu thun hat, das zuerst von Branly und in neuester Zeit auch von Lodge¹⁾, Minchin²⁾, v. Lang³⁾ u. A. beobachtet worden ist. (Hiernach wären auch die scheinbaren Widerstandsänderungen von Drähten, die ich früher mehrfach beobachten konnte, wohl durch Einwirkung auf die Contacte mit den Zuführungen zu erklären.

1) O. J. Lodge, The work of Hertz and some of his successors. 1894.

2) G. Minchin, Phil. Mag. 37. p. 90. 1894.

3) V. v. Lang, Wien. Ber. (2) 104. p. 1, 1895.

Was nun die von Hrn. Mizuno gegebene Erklärung des Phänomens betrifft, so scheint mir dieselbe nicht recht plausibel zu sein. Denn danach wäre es sehr auffallend, dass Platinspiegel und einige andere Substanzen unter dem Einfluss electricer Wellen gerade eine Vergrösserung ihres Widerstandes erleiden.¹⁾ Ausserdem habe ich bei meinen Stanniolgittern und Drähten regelmässig die Beobachtung gemacht, dass vor der Einwirkung der Schwingungen noch so starke mechanische Erschütterungen keine Aenderung des Widerstandes zur Folge haben, was mit Mizuno's Theorie der leicht beweglichen Metalltheilchen schwer in Einklang zu bringen scheint, zumal nach eingetretener Widerstandsänderung nur ein äusserst geringer Stoss nöthig ist, um den Anfangswiderstand wiederherzustellen. Auch Hr. Branly ist der Ansicht, dass seine Versuche eine rein mechanische Deutung der Erscheinung nicht zulassen.²⁾

Berlin, Phys. Inst. d. Univ., December 1895.

1) E. Branly, Lum. él. **40**. p. 511. 1891; E. Aschkinass, l. c. p. 109.

2) E. Branly, Lum. él. **40**. p. 511. 1891; Journ. d. Phys. (3) **4**. p. 273. 1895.

3. Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen; von Josef Ritter v. Geitler.

(II. Mittheilung.)

(Aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, 104, Abth IIa. October 1895; für die Annalen bearbeitet vom Verf.)

Wie ich in einer früheren Arbeit über diesen Gegenstand¹⁾ angedeutet habe, hatte sich die gleichzeitige Anwendung der beiden Methoden, welche über den Schwingungsvorgang in den dort beschriebenen Erregern Aufschluss geben sollten (Beobachtung der Wellenform und Resonatormethode), als undurchführbar erwiesen. Daher hatte ich mich mit der Resonatormethode allein begnügen müssen.

Die Erscheinung, welche mich dazu zwang, war die folgende: Als ich die Wellenlänge der einfachen Hertz'schen Erreger, aus welchen die complicirten Kreise gebildet werden sollten, mit Hülfe des Resonators bestimmen wollte, während gleichzeitig zur Ermittlung der Wellenform eine 170 m lange Lecher'sche Secundärleitung den Erregern angehängt war, da fand ich in mehreren Fällen, *dass diese einfachen Erreger nicht eine, sondern gleichzeitig mehrere, nahe bei einander liegende Wellenlängen emittirten.*

Ich hatte diese Versuchsanordnung in der Erwartung getroffen, dass eine secundäre Leitung, deren Länge sehr gross gegen diejenige des Erregers ist, die vom primären Kreise erzeugten Schwingungen, deren Periode durch die vergrösserte Capacität gegenüber jener der freien Eigenschwingungen vielleicht verlangsamt würde, einfach fortleite. Dazu war ich durch die Versuche von V. Bjerknes, mir und andern²⁾ berechtigt, bei welchen zweifellos fortschreitende Wellen in der Secundärleitung vorhanden waren. Die eben erwähnte Beobachtung bewies jedoch, dass diese Anschauung nicht streng richtig sein konnte; es war vielmehr die Annahme unabweislich, dass der primäre

1) Wien. Akad. 104. Abth. IIa. p. 171. 1895 oder Wied. Ann. 55. p. 513. 1895.

2) V. Bjerknes, Wied. Ann. 44. p. 513. 1891; Geitler, Wied. Ann. 49. 1893 etc.

Kreis und die secundäre Leitung, auch bei sehr grosser Länge der letzteren, zusammen ein schwingendes System bilden, und dass die aufgefundenen Schwingungen Schwingungen dieses Systems seien. Die Wahrheit ist wohl, dass die secundäre Leitung in solchen Systemen die doppelte Rolle eines Erregers und Fortleiters der Wellen spielt. Die Vorgänge in derartigen complicirten Systemen sind bereits mehrfach zum Gegenstande der Untersuchung gemacht worden (vgl. weiter unten). Gleichwohl schien es mir wünschenswerth, an die Lösung der dabei auftretenden Fragen nach einer anderen Methode zu schreiten,

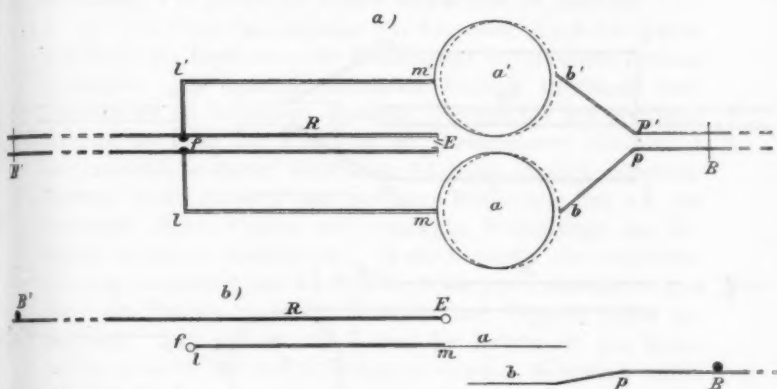


Fig. 1.

als dies bisher geschehen war. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind im Folgenden wiedergegeben. Doch muss ich gestehen, dass mir auch jetzt noch, wenn ich so sagen darf, die feinere Mechanik des ganzen Schwingungsverlaufes in solchen Systemen sehr der Aufklärung bedürftig erscheint.

1. Die beiden Versuchsanordnungen sind in den Fig. 1a, 1b und 2a, 2b schematisch dargestellt.

Die Aufstellung war kurz die folgende: Einem primären Hertz'schen Erreger $af'a'$, welcher durch ein grosses Ruhmkorff'sches Inductorium gespeist wurde, war eine Lecher'sche Secundärleitung bBb' gegenübergestellt. Der Abstand zwischen den Platten aa' des primären und den Platten bb' des secun-

dären Kreises konnte verändert werden. Desgleichen war die Länge der secundären Leitung durch Verschieben der Brücke B regulirbar. Die von dem primären Kreise ausgesendeten Schwingungen wurden mit Hülfe des Resonators R analysirt. Derselbe war bei E mit dem früher beschriebenen Electrometer¹⁾ versehen, dessen Ausschläge mit einem 1,5 m vom Spiegel entfernten Scalenfernrohre abgelesen wurden. Die Resonatorlänge wurde in der ebenfalls früher beschriebenen Weise durch Verschieben der Brücke B' verändert. Sowohl die Länge des Resonators, als auch jene des secundären Kreises

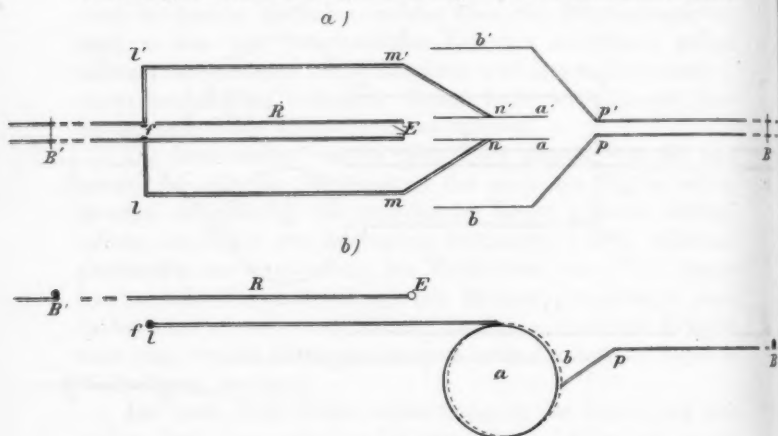


Fig. 2.

wurden an je einer neben denselben angebrachten Theilung abgenommen.

Es seien nun noch die wichtigsten Dimensionen der Aufstellung angegeben. Die Funkenstrecke f war, wie früher, durch zwei Messingkugeln von 2 cm Radius gebildet. Der primäre, 2 mm starke Draht war von weichem Kupfer, die kreisrunden Zinkplatten $a a' b b'$ hatten einen Halbmesser von 20 cm. Es war die Länge $ll = 0,5$ m; $lm = lm' = 1$ m; $mn = m'n' = 35$ cm. Der Abstand δ zwischen $a(a')$ und $b(b')$

1) Geitler, Wien. Akad. 104. Abth. IIa. I. c. oder Wied. Ann. 55. 1893. I. c.

war variabel und wird später für die einzelnen Fälle angegeben werden. Die secundäre Leitung bestand aus 1 mm starkem, weichem Kupferdraht; die Distanz der secundären Drähte war überall, von pp' angefangen, möglichst genau gleich 3 cm.¹⁾ Das Stück von $p(p')$ zu den Platten $b(b')$ war im Falle der Fig. 1 = 35 cm, im Falle der Fig. 2 = 40 cm. Der Resonator bestand aus 2 mm starkem Kupferdraht²⁾, die Distanz der Drähte war 5 cm. Der Resonator war 10 cm über der Ebene des primären Kreises, parallel mit derselben angebracht; diese Entfernung war genügend, um eine Wechselwirkung zwischen Resonator und primärem Kreise unmerkbar zu machen.

2. Der Gang der Versuche war folgender: Zunächst wurde mit Hülfe des Resonators die Wellenlänge des primären Kreises bestimmt, ohne dass die secundäre Leitung angehängt war. (Hierbei ist zu bemerken, dass die Wellenlänge des primären Kreises im Falle der Fig. 1 für die verschiedenen Distanzen δ eine verschiedene war; die Platten $b b'$ lagen nämlich auf einem Brette, dessen grössere oder geringere Entfernung von aa' die Capacität dieser Platten und somit die Wellenlänge des Erregers merklich beeinflusste.) Sodann wurde die secundäre Leitung angehängt und die Brücke B bei pp' aufgelegt. Diese Lage der Brücke ist in den Tabellen und Figuren mit 0 bezeichnet. Nun wurden die Lagen der Brücke B' des Resonators gesucht, für welche Resonanz eintrat. Weiterhin wurde die Brücke B an den secundären Drähten verschoben und für jede neue Lage derselben die Untersuchung mit dem Resonator wiederholt.

3. Die Ergebnisse dieser Versuche sind in den folgenden Figuren zusammengestellt. Es bedeuten

L_s die Länge der secundären Leitung von pp' an gerechnet bis zur Brücke B in Metern:

L_r die doppelte Länge des Resonators vom Electrometer bis zur Brücke B' , für welche Resonanz eintrat; L_r ist gleich der halben Wellenlänge der entsprechenden Schwingung in Centimetern³⁾;

1) Geitler, Wied. Ann. 49. p. 195. 1893.

2) Vgl. V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 121—169. 1895.

3) Ueber die Berechtigung dieser Annahme vgl. Wien. Akad. 104. IIa. p. 174. 1895 oder Wied. Ann. 55. p. 517. 1895; sowie P. Drude, Wied. Ann. 53. p. 728. 729. 1894.

$L_r^{(0)}$ bedeutet die halbe Wellenlänge des unbeeinflussten Erregers.

In den Figuren sind als Abscissen die L_s in Metern, als Ordinaten die entsprechenden halben Wellenlängen L_r in Centimetern aufgetragen. Fig. 3—6 beziehen sich auf die Aufstellung Fig. 1; Fig. 7a und 7b auf die Anordnung Fig. 2.

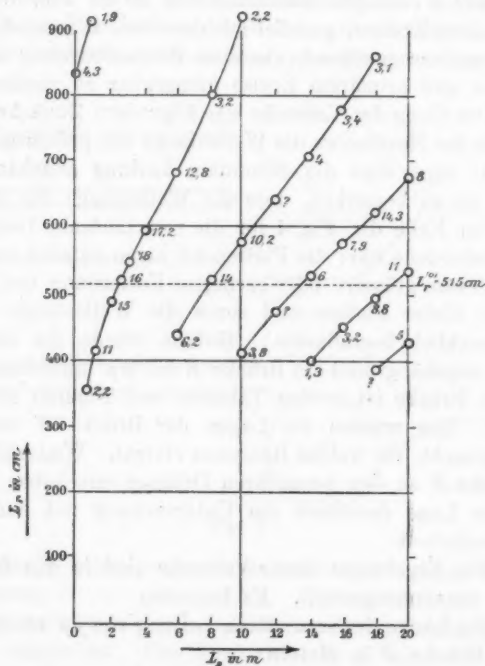


Fig. 3 ($\delta = 4,5$ cm).

Jedem beobachteten Punkt der Curven ist der Ausschlag des Electrometers in Scalentheilen für das durch L_r angegebene Resonanzmaximum beigelegt.

4. Hieraus lassen sich folgende Resultate entnehmen:

Der Primärkreis eines Lecher'schen Systems emittirt im allgemeinen für jede bestimmte Länge der secundären Leitung gleich-

zeitig mehrere, mit der Länge des secundären Kreises in bestimmter Weise veränderliche Schwingungen von verschiedener Periode und Intensität.

Die Perioden der ausgesendeten Wellen sind theils kleiner, theils gleich und theils grösser als diejenige der freien Eigenschwingung des unbelasteten Primärkreises.

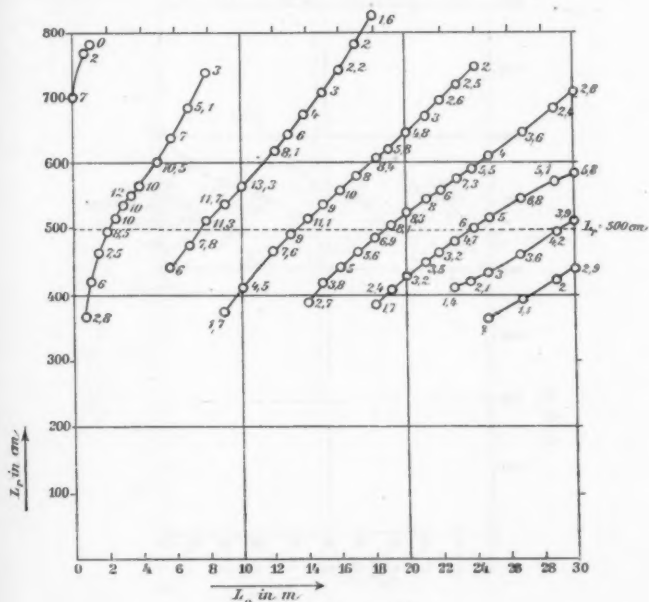


Fig. 4 ($\delta = 7$ cm).

Stellt man die Längen der emittirten simultanen Schwingungen, wie dies in den Fig. 3—7 geschehen ist, als Functionen der Länge der secundären Leitung dar, so ordnen sich dieselben in eine Curvenschaar. Die Anzahl der nachweisbaren Simultanschwingungen scheint von der Stärke der gegenseitigen Beeinflussung der beiden Kreise abzuhängen, da sie um so grösser wird, je mehr man den Abstand der secundären von den primären Platten verringert. Bezeichnet man die auf einer und derselben Curve der Schaar liegenden Wellen als

conjugirte, so kann man den Satz aussprechen, dass die Intensität der conjugirten Wellen auf jeder Curve ein Maximum besitzt.¹⁾ Ein Blick auf die in den Figuren mitgetheilten Zahlen zeigt ferner, dass in den verschiedenen Systemen von Simultanschwingungen der grösseren Wellenlänge durchaus nicht auch gleichzeitig die grössere Intensität entspricht, auch

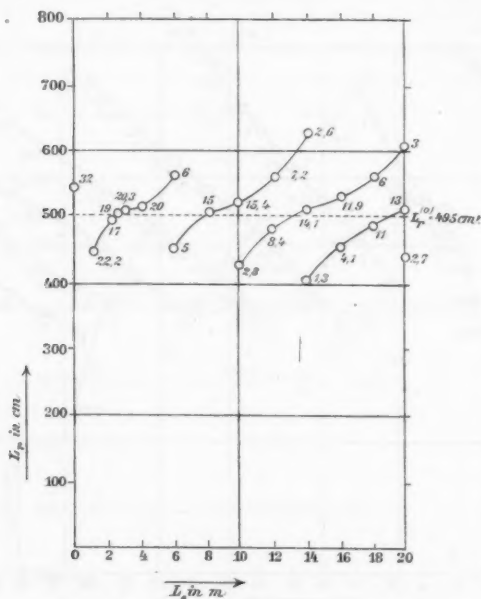


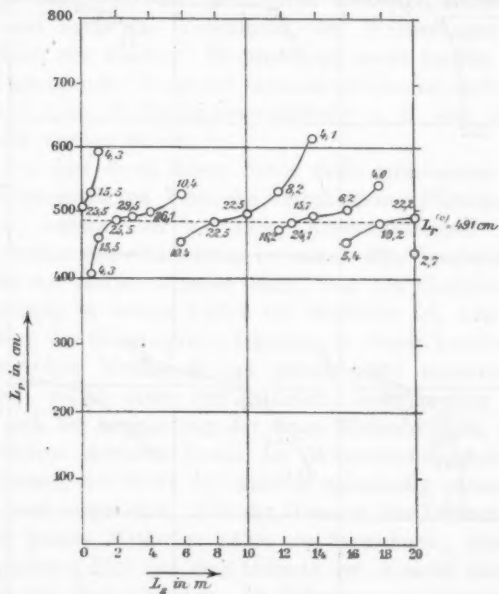
Fig. 5 ($\delta = 16$ cm).

nicht in den Fällen, in welchen nicht mehr als zwei Simultanschwingungen auftreten.

Es liegt sehr nahe, die Emission eines complicirten Erregers mit dem Spectrum eines leuchtenden Körpers zu ver-

1) Die kleinen Unregelmässigkeiten, welche sich in dieser Beziehung finden, z. B. das scheinbare Auftreten zweier solcher Maxima auf derselben Curve haben ihren Grund wohl nur in der Unzuverlässigkeit der primären Funken. Die mitgetheilten Zahlen sind meist einer einmaligen Beobachtungsreihe entnommen.

gleichen. Es ist dies auch schon von anderer Seite versucht worden. D. Mazzotto spricht auf Grund seiner Versuche die Vermuthung aus¹⁾, dass das Lecher'sche System gleichzeitig mehrere Schwingungen aussende und sagt, man könnte in diesem Falle die Schwingung des Systems vergleichen mit derjenigen einer leuchtenden Substanz, welche geeignet ist, ein Linienspectrum (spettro a righe brillanti) zu geben. Meine Ver-



welche sehr an die in den Spectralserien mancher Elemente auftretenden Doppellinien erinnern; besonders deutlich ist diese letztere Analogie in jenen Fällen, wo nur zwei Simultanschwingungen nachweisbar sind. In einem Falle der Vorver-

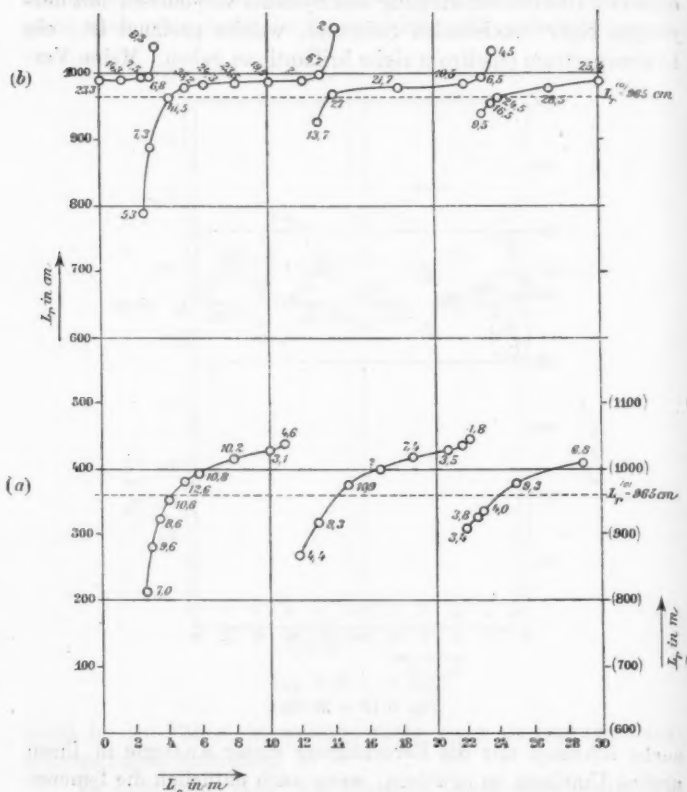


Fig. 7 [(a) ... $\delta = 10$ cm; (b) ... $\delta = 30$ cm].

suche erhielt ich zwei Simultanschwingungen von den halben Wellenlängen: $\lambda_1 = 990$ cm, $\lambda_2 = 1025$ cm; bildet man das Verhältniss der Wellenlängen, so erhält man $\lambda_1/\lambda_2 = 0,965$. Bildet man das analoge Verhältniss z. B. für die beiden Wellenlängen des ersten Duplets der Hauptserie im Spectrum

des Rubidium ¹⁾, $\lambda_1 = 7811$ (Å. E.), $\lambda_2 = 7950$ (Å. E.), so findet man $\lambda_1 / \lambda_2 = 0,982$. Diese Zahlen scheinen mir die gemachte Behauptung zu stützen. Wie die Versuche zeigen, besitzen die Ordinatendifferenzen zweier benachbarten Curven (siehe Figur) für jedes Curvenpaar ein Minimum. Dieses Minimum nimmt, wie besonders aus jenen Versuchen hervorgeht, bei welchen nur zwei Simultanschwingungen vorhanden waren, bei zunehmender Länge der secundären Leitung beständig ab; daher wird auch das Verhältniss der Wellenlängen immer mehr gleich der Einheit. Es unterliegt somit keinem Zweifel, dass bei genügender Länge der secundären Leitung auch Doppel-*linien* von dem Wellenlängenverhältniss z. B. der *D*-Linien hergestellt werden können.²⁾

5. Ich darf es an dieser Stelle nicht unterlassen, auf die äusserst interessanten Versuche verschiedener Physiker³⁾ hinzuweisen, welche sich mit den „Knotensystemen“ an der Lecher'schen Secundärleitung befassen. Ein Vergleich dieser Versuche mit meinen eigenen zeigt, dass der Gegenstand der Untersuchung in beiden Fällen ein ähnlicher ist, nämlich die Ermittlung des Schwingungsvorganges in einem Lecher'schen Systeme. Die Methoden sind jedoch ganz wesentlich verschiedene; es ist daher nur natürlich, dass gewisse Fragen, welche sich bei Anwendung der einen Methode nicht oder nur bis zu einem gewissen Grade der Wahrscheinlichkeit beantworten lassen, mit Hülfe der anderen vollständig gelöst werden können und umgekehrt. Um die Grenzen der Leistungsfähigkeit der beiden Methoden näher zu bezeichnen, möchte ich einen analogen Fall aus dem Gebiete der Akustik betrachten. Es möge sich darum handeln, die Schwingungen einer tönenden Saite experimentell zu untersuchen. Die Saite sei (Fig. 8) auf einem Monochord befestigt; *b* und *c* seien verschiebbare

1) Kayser u. Runge, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890. Separat-Abdruck p. 51.

2) Vgl. auch B. Galitzin, Wied. Ann. 56. p. 78. 1895.

3) E. Lecher, Wien. Akad. 99. Abth. IIa. 1890; oder Wied. Ann. 41. p. 850. 1890. — E. Cohn u. F. Heerwagen, Wied. Ann. 43. p. 343. 1891. — H. Ebert u. E. Wiedemann, Wied. Ann. 48. p. 549. 1893; 49. p. 1. 1893. — E. Salvioni, Nuovo Cimento (3) 35. fasc. d'aprile 1894. — D. Mazzotto, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino 28. 29. 1893 und 29. 1894.

Keile, mit deren Hülfe je ein Punkt der Saite künstlich zu einem Knotenpunkte gemacht werden kann. Bei a soll die Saite, und zwar immer in derselben Weise, zum Schwingen erregt werden. Es entstehen mehrere Fragen: 1. Wenn die Distanz ab unveränderlich bleibt: für welche Lagen von c wird das Saitenstück bc zum Tönen gebracht? 2. Wenn c fest bleibt und b verschoben wird: für welche Lagen von b werden die Stücke ab und bc gleichzeitig zum Tönen gebracht? — Führt man die zur Beantwortung dieser beiden Fragen nöthigen Versuche aus, so erhält man sämtliche Schwingungen oder Obertöne, welche die Saite bei den verschiedensten Versuchsbedingungen geben kann. Fragt man aber: 3. Welches ist bei einer bestimmten Saitenlänge ab oder ac der thatsächliche Schwingungsvorgang, d. h. welches sind die in diesem ganz bestimmten Falle wirklich auftretenden Schwingungen

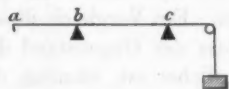


Fig. 8.

und welches die Intensität jeder einzelnen von ihnen? — so versagen die beiden ersten Methoden der Untersuchung. Nach den mit denselben gewonnenen Erfahrungen kann man wohl sagen, es sei

möglich, dass diese oder jene Schwingungen gleichzeitig auftreten, eine Gewissheit für diese Behauptung bieten die Versuche jedoch nicht; über das Intensitätsverhältniss der auftretenden Schwingungen aber gestatten dieselben überhaupt keine Aussage. Will man demnach die dritte Frage beantworten, so muss man eine andere Methode der Untersuchung wählen, durch welche an den Versuchsbedingungen der Saite selbst nichts geändert wird. Man wird die Schwingungen der Saite z. B. photographiren oder mit Hülfe von Resonatoren analysiren. Auf diese Weise wird man Frage 3 vollständig beantworten können: Die nach diesen drei Methoden erhaltenen Resultate werden miteinander in einem Widerspruche nicht stehen können.

Ganz ebenso wie in diesem akustischen Beispiele liegt die Sache im vorliegenden Falle der Schwingungen in einem Lecher'schen Drahtsystem. Die entsprechenden Fragen 1 und 2 sind durch die citirten Untersuchungen der oben genannten Forscher beantwortet. Eine Methode zur Lösung der dritten

Frage glaube ich in der vorliegenden Arbeit angegeben zu haben. Dieselbe Methode scheint auch geeignet, um über eine Reihe anderer Fragen, welche sich bei veränderten Versuchsbedingungen aufdrängen, bequemen Aufschluss zu geben.

6. *Zur Theorie.* Im Anschlusse an die vorliegende Arbeit und an meine frühere Mittheilung sollen noch kurz die Resultate angeführt werden, zu welchen die unter den Kirchhoff'schen Annahmen angestellte Berechnung des Schwingungsvorganges in einem System von n einfachen Hertz'schen Erregern, welche einander beliebig beeinflussen, führt. Die Rechnung gestaltet sich ganz analog, wie in dem von Prof. Jaumann behandelten Falle, welchen ich früher mitgeteilt habe.¹⁾

Gegeben sind n einfache Hertz'sche Erreger, bestehend aus je zwei punktförmig gedachten Conductoren (1) und (2) von den Capacitäten $c_{ii}^{(1,1)}$ und $c_{ii}^{(2,2)}$ ($i=1, 2, \dots, n$), welche durch einen capacitätsfreien, widerstandslosen Draht vom Selbstinductionscoefficienten L_{ii} ($i=1, 2, \dots, n$) verbunden sind. Die Coefficienten der gegenseitigen Induction der Drähte i und k sollen mit $L_{ik} = L_{ki}$ bezeichnet werden. Die electrostatischen Inductionscoefficienten²⁾ der $2n$ Conductoren werden dargestellt durch die Grössen: $c_{ik}^{(1,1)}$, $c_{ik}^{(1,2)}$... Es bedeutet, wie auch in der Figur ersichtlich gemacht ist, z. B. $c_{ik}^{(2,1)} = c_{ki}^{(1,2)}$ den electrostatischen Inductionscoefficienten des Conductors (2) des Erregers i auf den Conductor (1) des Erregers k u. s. w. Mit

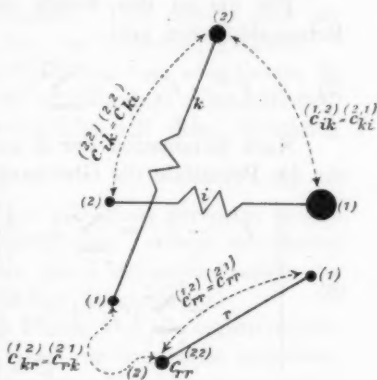


Fig. 9.

1) Geitler, Wien. Akad. 103. Abth. IIa. p. 175. 1895; oder Wied. Ann. 55. p. 521. 1895.

2) Bezüglich der Bedeutung c_{ik} und c_{ii} vgl. Maxwell, Electr. und Magnet. Deutsch von Weinstein, 1. § 87. 1883; die entsprechenden Grössen sind bei Maxwell mit q_{rs} und q_{rr} bezeichnet.

$V_i^{(1)}, V_i^{(2)}$ werden die Potentiale bezeichnet, welche bez. auf dem Conductor (1) oder (2) des Erregers i herrschen. Unter J_i ist die Stromstärke im Drahte i zu verstehen, positiv gerechnet, wenn der Strom vom Conductor (1) zum Conductor (2) des betreffenden Drahtes fliesst.

Man erhält dann für die Stromstärke J_i die Gleichung:

$$(1) \quad J_i = - \sum_{k=1}^{k=n} (c_{ik}^{(2,1)} + c_{ik}^{(1,1)}) \frac{dV_k^{(1)}}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} (c_{ik}^{(2,2)} + c_{ik}^{(1,2)}) \frac{dV_k^{(2)}}{dt} \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Für die an den Enden des i ten Erregers herrschende Potentialdifferenz gilt:

$$(2) \quad V_i^{(1)} - V_i^{(2)} = - \sum_{p=1}^{p=n} L_{ip} \frac{dJ_p}{dt}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nach Elimination der J_i aus Gleichung (1) und (2) folgt für die Potentiale die Gleichung:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} V_i^{(1)} - V_i^{(2)} &= \sum_{p=1}^{p=n} L_{ip} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} (c_{pk}^{(2,1)} + c_{pk}^{(1,1)}) \frac{d^2 V_k^{(1)}}{dt^2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{k=n} (c_{pk}^{(2,2)} + c_{pk}^{(1,2)}) \frac{d^2 V_k^{(2)}}{dt^2} \right\}, \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

Ein Integral derselben ist:

$$(4) \quad V_r = A_r \sin x t.$$

Hierin bedeutet A_r die Amplitude des Potentials V_r , t die Zeit und $x = 2\pi/T$, wenn T die Periode der Schwingung ist. Durch Einsetzen von (4) in (3) erhält man n lineare, in den $2n$ Grössen $A_i^{(1)}$ und $A_i^{(2)}$ homogene Gleichungen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p=1}^{p=n} L_{ip} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} (c_{pk}^{(2,1)} + c_{pk}^{(1,1)}) \cdot x^2 A_k^{(1)} - \sum_{k=1}^{k=n} (c_{pk}^{(2,2)} + c_{pk}^{(1,2)}) \cdot x^2 A_k^{(2)} \right\} - A_i^{(1)} + A_i^{(2)} &= 0, \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

Die A mit gleichem untern Index sind voneinander nicht

unabhängig. Vielmehr erfüllen sie, da nach den gemachten Voraussetzungen eine Dämpfung der Schwingungen nicht eintreten kann, die folgenden n linearen homogenen Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{k=n} (c_{ik}^{(1,1)} + c_{ik}^{(2,1)}) A_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=n} (c_{ik}^{(1,2)} + c_{ik}^{(2,2)}) A_k^{(2)} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Die Gleichungen (5) und (6) bilden zusammen ein System von $2n$ linearen, in den $2n$ Grössen $A_i^{(1)}$ und $A_i^{(2)}$ homogenen Gleichungen. Die Determinante der Coefficienten dieser $2n$ Grössen muss demnach verschwinden. Dies ergibt aber zur Berechnung der Grössen x^2 , bez. der Schwingungsdauern T des Systems, eine algebraische Gleichung vom n ten Grade, da die n Gleichungen (6) die Grösse x^2 überhaupt nicht enthalten. Aus Rücksichten der Raumersparniss soll diese Gleichung nicht angeschrieben werden.

Es ergibt sich demnach:

Ein System von n beliebigen einfachen Erregern, welche einander gegenseitig beliebig beeinflussen, erzeugt gleichzeitig höchstens n voneinander und von den n Eigenschwingungen der unbeeinflussten n Erreger verschiedene Schwingungen.

In den practisch wichtigen Fällen wird die experimentelle Anordnung meist einen hohen Grad von Symmetrie aufweisen. Ist das ganze System von Erregern vollständig symmetrisch um eine durch dasselbe gelegte Ebene und ausserdem jeder einzelne Erreger symmetrisch um einen Punkt seines Drahtes, so bestehen folgende Gleichungen zwischen den in die Rechnung eintretenden Grössen, wodurch letztere wesentlich vereinfacht wird:

$$L_{ik} = L_{ki}; \quad c_{ik}^{(1,2)} = c_{ik}^{(2,1)} = c_{ki}^{(2,1)} = c_{ki}^{(1,2)}; \quad c_{ik}^{(1,1)} = c_{ki}^{(2,2)}; \\ F_i^{(1)} = -V_i^{(2)} = V_i; \quad A_i^{(1)} = -A_i^{(2)} = A_i.$$

Mit Rücksicht hierauf erhält Gleichung (5) die Gestalt:

$$(5a) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{k=1}^{k=n} (c_{pk}^{(1,1)} + c_{pk}^{(1,2)}) L_{ip} \cdot x^2 \cdot A_k - A_i = 0; \quad [i = 1, 2, \dots, n].$$

Dies ist ein System von n mit Bezug auf die n Grössen A homogenen linearen Gleichungen; demnach muss die Deter-

minante der Coefficienten dieser n Grössen verschwinden, wodurch, wie im allgemeineren Falle, eine Gleichung n ten Grades zur Bestimmung der x^2 , bez. der T erhalten wird. Diese Gleichung ist die folgende:

$$(7) \quad \left| \begin{array}{c} \left[\sum_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} + c_{k1}^{(1,2)}) L_{1k} x^2 - 1 \right], \sum_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} + c_{k2}^{(1,2)}) L_{1k} x^2, \dots, \\ \sum_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} + c_{kn}^{(1,2)}) L_{1k} x^2 \\ \sum_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} + c_{k1}^{(1,2)}) L_{2k} x^2, \left[\sum_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} + c_{k2}^{(1,2)}) L_{2k} x^2 - 1 \right], \dots, \\ \sum_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} + c_{kn}^{(1,2)}) L_{2k} x^2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} + c_{k1}^{(1,2)}) L_{nk} x^2, \sum_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} + c_{k2}^{(1,2)}) L_{nk} x^2, \dots, \\ \left[\sum_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} + c_{kn}^{(1,2)}) L_{nk} x^2 - 1 \right] \end{array} \right| = 0$$

Es vermag demnach auch ein mit Bezug auf eine Ebene vollkommen symmetrisches System von n einander beeinflussenden einfachen Hertz'schen Erregern höchstens n voneinander und von

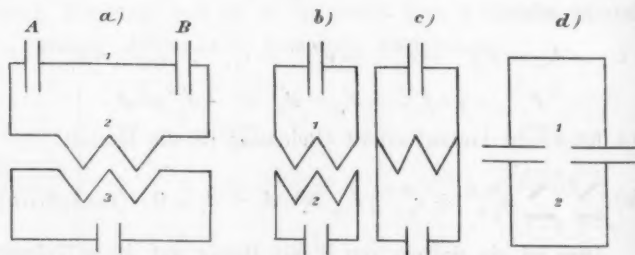


Fig. 10.

den n Eigenschwingungen der n unbeeinflussten Einzelkreise verschiedene Schwingungsdauern zu erzeugen.

Um die Anwendbarkeit dieser Formel auf spezielle Fälle zu zeigen, soll zunächst der Schwingungsvorgang in einer Tesla'schen Anordnung mit Hilfe derselben berechnet werden, denn die Rechnung ist auch auf Erreger von anderen Dimensionen, als denjenigen der Hertz'schen Kreise, anwendbar, so lange nur die der Rechnung zu Grunde liegenden Annahmen gültig bleiben.

Fig. 10a gibt eine Skizze der Tesla'schen Aufstellung. Man hat zu setzen;

$$n = 3; \quad \begin{aligned} c_{13} &= c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0,^1) \\ L_{13} &= L_{31} = L_{12} = L_{21} = 0. \end{aligned}$$

Mithin

$$\begin{vmatrix} (c_{11} L_{11} x^2 - 1), & c_{13} L_{11} x^2, & 0 \\ c_{12} L_{22} x^2, & (c_{22} L_{22} x^2 - 1) & c_{33} L_{23} x^2 \\ c_{12} L_{23} x^2, & c_{22} L_{23} x^2, & (c_{33} L_{33} x^2 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Die gewöhnliche Tesla'sche Anordnung erzeugt demnach drei Schwingungen.

Für den Fall $n = 2$ ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} [(c_{11} L_{11} + c_{12} L_{12}) x^2 - 1], & (c_{12} L_{11} + c_{22} L_{12}) x^2 \\ (c_{11} L_{12} + c_{12} L_{22}) x^2, & [(c_{12} L_{12} + c_{22} L_{22}) x^2 - 1] \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x^4 - \frac{c_{11} L_{11} + c_{22} L_{22} + 2c_{12} L_{12}}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2)(L_{11} L_{22} - L_{12}^2)} x^2 + \frac{1}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2)(L_{11} L_{22} - L_{12}^2)} = 0.$$

Dies ergibt für den Fall der Blondlot'schen²⁾ Anordnung (vgl. Fig. 10b), bei welcher $c_{13} = 0$ zu setzen ist, für T die Gleichung:

$$x^2 = \frac{1}{2} \frac{c_{11} L_{11} + c_{22} L_{22}}{c_{11} c_{22} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \frac{c_{11} L_{11} + c_{22} L_{22}}{c_{11} c_{22} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)} \right]^2 - \frac{1}{c_{11} c_{22} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)}}.$$

Diese Anordnung ergibt also im allgemeinen zwei von den Eigenschwingungen der Einzelkreise verschiedene Schwin-

1) Die hier und im Folgenden eingeführte Bezeichnungsweise ist wohl ohne weiteres verständlich.

2) R. Blondlot, Compt. rend. 114. p. 283. 1892.

gungen.¹⁾ In dem extremen Falle, dass $L_{12} = 0$ wird, wenn also die Kreise sich gegenseitig nicht beeinflussen, so sind die möglichen zwei Schwingungen gleich den Eigenschwingungen der Einzelkreise²⁾; in dem anderen extremen Falle, in welchem eine der Grössen c_{11} , L_{11} , c_{22} , L_{22} unendlich wird, hat das System nur eine einzige Schwingungsdauer gleich derjenigen des Einzelkreises, dessen Periode endlich bleibt.³⁾

Für die Lecher'sche Aufstellung (Fig. 10d), bei welcher c_{12} nicht verschwindet, hingegen $L_{12} = 0$ zu setzen ist, folgt:

$$x^2 = \frac{1}{2} \frac{c_{11} L_{11} + c_{22} L_{22}}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2) L_{11} L_{22}} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \frac{c_{11} L_{11} + c_{22} L_{22}}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2) L_{11} L_{22}} \right]^2 - \frac{1}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2) L_{11} L_{22}}}$$

Auch hier gelten ganz ähnliche Sätze, wie für die Blondlot'sche Anordnung, wenn einmal $c_{12} = 0$, das andere Mal eine der Grössen c_{11} , L_{11} , c_{22} , $L_{22} = \infty$ gesetzt wird. Im allgemeinen emittirt jedoch die Lecher'sche Anordnung zwei Schwingungen, welche von den freien Eigenschwingungen der Einzelkreise verschieden sind.

1) A. Overbeck (Wied. Ann. 55. p. 623. 1895) legt seiner Berechnung der Tesla'schen Versuche nicht das Schema Fig. 10a zu Grunde, sondern sagt: „Endlich können wir uns die Condensatoren A und B (vgl. Fig. 10a) für die Berechnung durch einen einzigen Condensator von halber Capacität ersetzt denken, sodass wir den weiteren Betrachtungen die Anordnung Fig. 10b zu Grunde legen können.“ A. Overbeck erhält auch das richtige Resultat, dass eine Anordnung Fig. 10b zwei Perioden besitzt. Dies gilt aber, wie gezeigt wurde, nicht für die wirkliche Tesla'sche Aufstellung. Noch eine Bemerkung sei mit Bezug auf diese Anordnung gestattet. Denkt man sich die einander beeinflussenden Theile der Drähte in Fig. 10b einander immer mehr und mehr genähert, bis dieselbe endlich, wie in Fig. 10c, zusammenfallen (ein Uebergang, wie er bei der Berechnung von Selbstinductionscoefficienten angewendet wird), so erhält man hierdurch unmittelbar einen complicirten Erreger von der Form, welche ich in meiner früheren Mittheilung (diese Sitzungsber. 104. Abth. IIa., Februar 1895; oder Wied. Ann. 55. p. 513. 1895) untersucht habe. Es kann daher nicht verwundern, dass das Resultat für beide Fälle nahezu identisch ist. Bezüglich der Discussion specieller Fälle der Anordnung 10b vgl. A. Overbeck, l. c.

2) Vgl. V. Bjerknes, l. c. p. 127.

3) Vgl. auch F. Koláček, sowie Koláček u. Domalip, Sitzber. der böhm. Ges. d. Wissensch. 1895.

Alle angeführten Resultate gelten streng nur für die einschränkenden Voraussetzungen, welche über den Widerstand und die Capacität der Drähte gemacht wurden. Die hier in Kürze dargestellte Theorie gestattet daher keinerlei Aussage: einestheils über die Dämpfung oder Aperiodicität der einzelnen Schwingungen bei Versuchen, wo der Widerstand der Drähte nicht zu vernachlässigen ist, anderentheils über das Auftreten von Oberschwingungen bei Benutzung von Drähten, deren eigene Capacität gegenüber derjenigen der verwendeten Condensatoren nicht als verschwindend klein betrachtet werden kann. Es ist möglich, Versuchsanordnungen zu treffen, bei welchen die genannten Voraussetzungen nahezu erfüllt sind; bei den mitgetheilten Versuchen war dies jedoch keineswegs der Fall.

Prag, Physik. Inst. der k. k. deutschen Univ.

4. Interferenzversuch mit electrischen Wellen; von Viktor von Lang.

(Aus den Sitzungsber. der k. Akademie der Wissensch. in Wien, math.-naturw. Klasse, 104. Abth. IIa Oct. 1894; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

I.

Das im Nachfolgenden beschriebene Experiment mit electrischen Wellen entspricht einem in die Akustik von Quincke eingeführten Interferenzversuche. Die ursprüngliche Welle wird in zwei Theile getheilt, welche ungleich lange Wege zurückzulegen haben und die nach ihrer Wiedervereinigung interferiren. Ich wollte diesen Versuch zuerst mit Messingröhren von 30 mm lichter Weite ausführen, bekam aber hierbei keine Anzeichen von Interferenz. Der Versuch gelang erst, als ich Röhren von ungefähr dem doppelten Durchmesser benutzte. Dieselben waren aus Papier geformt und natürlich mit Stanniol überzogen.

Die Erregung der Wellen, die ja von kurzer Länge sein mussten, geschah nach der von Righi¹⁾ angegebenen Methode, die nur insofern einfacher sein konnte, als bei meinen Versuchen die erregenden Funken horizontal zu sein hatten. Der Nachweis der electrischen Wellen geschah nämlich mit Hülfe der von Branly²⁾ gefundenen Thatsache, dass eine mit Metallfeilicht gefüllte Glasröhre ihren Widerstand entsprechend der electrischen Bestrahlung ändert, durch eine leise Erschütterung aber ihren anfänglichen Widerstand wieder annimmt.

Der benutzte Apparat Fig. 1 hatte also als Erreger einen kleinen parallelepipedischen Holztrog *A*, in dessen Längsseiten je eine kleine Messingkugel gesteckt war. Diese Kugeln bildeten so im Innern des Troges eine Funkenstrecke von nur 1 mm und darunter. Die Wände des Troges waren innen mit Tischlerleim angestrichen, um das Gefäß für Petroleum dicht zu

1) Righi, Beibl. p. 184. 960. 1894.

2) Branly, Beibl. p. 116. 229. 1891.

machen. Ich habe nämlich nach einigen Versuchen mit dem von Righi angegebenen Gemische von Vaseline und Vaselineöl, welches beim Durchschlagen der Funken sehr stark schäumte, es vorgezogen, reines Petroleum zu nehmen. Die Kugeln beschlagen sich aus diesem Falle mit ausgeschiedener Kohle, was aber, wie schon Righi zeigte, den Effect des Erregers nicht stört.

Den beiden „Erregerkugeln“ im Troge *A* stehen in der Luft die zwei Entladerkugeln *B*, *B'* in grösserer Distanz gegen-

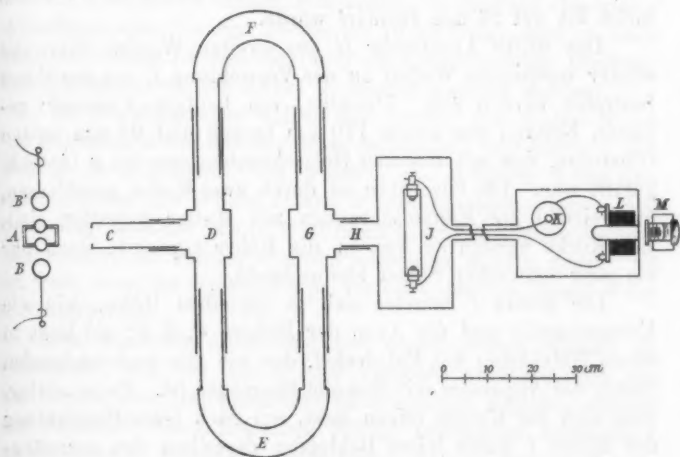


Fig. 1.

über. Diese Kugeln sind mit den Polen einer zwanzigplattigen Toepler'schen Influenzmaschine verbunden, und jede Entladung derselben gibt so zwei Funken in Luft und einen kürzeren Funken in Petroleum. Die Influenzmaschine wurde, hauptsächlich zur Erzielung eines gleichförmigen Ganges durch einen Electromotor in Bewegung gesetzt. Von dem Erreger gelangen die Wellen an den eigentlichen Interferenzapparat. Derselbe besteht aus zwei Pappwürfeln *D*, *G*, welche an drei verschiedenen Seiten Pappröhren mit einem inneren Durchmesser von 59 mm tragen. Vier dieser Röhren gestatten im Vereine mit zwei U-förmigen Röhren *E*, *F*, die beiden Würfel

auf zwei Wegen zu verbinden. Da jede der beiden U-Röhren um 200 mm ausziehbar ist, so können beide Wege um je 400 mm verlängert werden.

Das dritte Ansatzrohr des Würfels *D* trägt noch ein ebenfalls ausziehbares Zuleitungsrohr *C*, das sonderbarer Weise an seiner vorderen, gegen den Trog *A* gerichteten Oeffnung abgeblendet werden musste, sollte der Versuch möglichst deutlich sein. Zu diesem Zwecke konnten in die vordere Oeffnung des Rohres *C* verschiedene Diaphragmen aus Metallblech eingesetzt werden, wodurch der Durchmesser der freien Oeffnung meist bis auf 24 mm reducirt wurde.

Das dritte Ansatzrohr *H* des zweiten Würfels führt die wieder vereinigten Wellen zu der Vorrichtung *I*, die von ihnen bestrahlt werden soll. Dieselbe, von Lodge „Coherer“ genannt, bestand aus einem 170 mm langen und 22 mm weiten Glasrohre, das mit eisernen Holzschrauben von 0,1 g Gewicht gefüllt war. Die Glasröhre ist durch zwei Korke geschlossen, an welchen die Klemmschrauben mit Mutter befestigt sind. Die Korke werden so weit in die Röhre gepresst, dass nur ein sehr schwacher Strom hindurchgeht.

Die Röhre *I* befindet sich in derselben Höhe, wie die Erregerkugeln und die Axen der Röhren *C*, *E*, *F*; sie liegt in einem Holzkasten mit Falzdeckel, der wie alle vorhergehenden Theile des Apparates mit Stanniol überzogen ist. Es ist nöthig, dass sich der Kasten öffnen lässt, um nach jeder Bestrahlung der Röhre *I* durch leises Beklopfen derselben den ursprünglichen Widerstand herstellen zu können.

Von den Klemmschrauben des Coherer gehen zwei isolirte Leitungsdrähte durch Messingrohre, sodass ja die metallische Umschliessung nirgends unterbrochen ist, zu einem 2,5 m entfernten Metallkasten, in welchem sich ein Trockenelement *K* und die Multiplicatorrolle *L* befindet. Diese Rolle und eine ausserhalb des Kastens in einem Kupfergehäuse *M* befindliche Magnetnadel, welche an der Hinterseite eines aufgehängten Spiegelchens befestigt ist, bilden ein Galvanometer mit objectiver Ablesung. Ausserdem ist eine Luftdämpfung vorhanden, da dem Spiegel von hinten durch Schrauben ein Kupferstück beliebig genähert werden kann. Die Multiplicatorrolle ist aus dünnem Draht gewickelt und hat 6000 Ω Widerstand.

In der Nähe der Nadel befindet sich noch ein Richtmagnet, durch welchen die Componente des Erdmagnetismus, welche in der Axe der Multiplicatorrolle wirkt, nahezu aufgehoben wird. Es ist am besten, die Stellung des vom Spiegel mittels vorgesetzter Sammellinse entworfenen Bildes einer Flamme auf der Scala so zu wählen, dass bei offenem Stromkreise das Flammenbild auf das eine Ende der Scala, welche nur 700 mm lang ist, fällt, in unserem Falle also etwa auf den Theilstrich 75. Wird nun der Kreis, welcher Multiplicatorrolle, Trockenelement und die Glasröhre *I* enthält, geschlossen, so darf nur eine kleine Ablenkung etwa bis zum Theilstrich 70 eintreten, und es muss eben zu diesem Zwecke die durch die Korke bewirkte Pressung der Schrauben in der Röhre *I* passend regulirt werden.

Im Nachfolgenden wollen wir immer mit *S* den Stand des Flammenbildes auf der Scala bezeichnen und durch *T* den Betrag in Millimeter, um welchen die U-Röhre *E* aus den Ansatzröhren der Würfel *D* und *G* herausgezogen wurde. Auf dem einen Arm der Röhre *E* ist nämlich eine Millimetertheilung angebracht, an welcher *T* direct abgelesen werden kann. Es ist klar, dass der Grösse *T* eine Verlängerung des Weges *E* um $2 T$ entspricht.

Um über die Bedeutung der nachfolgenden Zahlen zu orientiren, will ich gleich hier Versuche anführen, die zur Calibrirung des Galvanometers unternommen wurden, obwohl die Empfindlichkeit desselben infolge geänderter Aufstellung nicht bei allen Versuchen gleich blieb. Für die meisten meiner Beobachtungen gelten aber die folgenden Zahlen, welche dadurch erhalten wurden, dass man an Stelle der Glasröhre *I* einen Widerstandskasten einschaltete. Es wurden so folgende zusammengehörige Zahlen für zugeschalteten Widerstand und Ablenkung der Magnetnadel erhalten.

<i>S</i>	Ω	<i>S</i>	Ω	<i>S</i>	Ω	<i>S</i>	Ω
75	∞	61	16000	49	5500	37	1900
73	70000	58	12000	46	4000	34	1300
70	40000	55	9000	43	3200	31	700
67	30000	52	7000	40	2500	28	200
64	21000						

II.

Mit Hülfe des eben beschriebenen Apparates konnte leicht die Interferenz electricischer Wellen nachgewiesen werden. Es gelang mir allerdings nie, die Wirkung der wiedervereinigten Wellen auf den Coherer gänzlich aufzuheben. Dies mag aber vielleicht nur in der unvollkommenen Ausführung des Apparates seinen Grund haben. Derselbe war ziemlich eilig zusammengestellt worden, und namentlich liess die Ausführung der Pappröhren vieles zu wünschen übrig. Möglicherweise hinderte aber auch das Vorhandensein von Obertönen in der erregten Welle die vollständige Vernichtung der letzteren.

Die abwechselnde Verstärkung und Schwächung, welche die beiden Wellenzüge aufeinander ausüben, wenn man eine der U-Röhren immer mehr herauszieht, ist stets und manchmal sehr eclatant zu beobachten, wenn man sich die Mühe nimmt, für die Entfernung des Würfels *D* vom Erreger und vom Diaphragma, sowie für den Durchmesser des letzteren die günstigsten Werthe aufzusuchen. Verkürzt man nämlich die angegebenen Entfernungen oder vergrößert man die Oeffnung des Diaphragmas, so werden dadurch allerdings die durch Bestrahlung erhaltenen Ausschläge grösser, oft aber wird dadurch der Unterschied zwischen den Verstärkungen und den Schwächungen viel weniger merklich.

Ich gebe im Folgenden beispielweise die Resultate von vier Beobachtungsreihen, wobei die Erregerkugeln (A) einen Durchmesser von 39,7 mm hatten und um beiläufig 1,1 mm voneinander abstanden, während die Länge des Luftfunkens 8 mm betrug. Die Entfernung des Erregers von der Mitte des ersten Würfels *D* variierte bei den verschiedenen Versuchen zwischen 520 und 660 mm, die Entfernung des Erregers von dem Diaphragma aber zwischen 60 und 200 mm, der Durchmesser der Oeffnung des Diaphragmas betrug 31 mm.

Noch ist zu bemerken, dass die Influenzmaschine für gewöhnlich durch einen dicken Draht kurz geschlossen war; dieser Draht wurde bei jedem Versuche auf die Dauer von etwa fünf Secunden entfernt; in dieser Zeit erreichte der Ausschlag sein Maximum.

Bei dem folgenden Versuche gibt T , wie schon erwähnt, die Stellung der Röhre E an, aber auch das Rohr F war um ungefähr 10 mm herausgezogen, in welcher Stellung dasselbe constant belassen wurde. Die Buchstaben S_1 und S_2 geben die Ablesungen am Galvanometer, und zwar vor und nach der Bestrahlung des Coherer.

T	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	Mittel
0	75	41	72	38	70	44	67	46,5	47,4
5	70	32,5	73	35	68	44	70	50	40,4
10	71	29	72	30,5	70	41	66	41	35,4
15	69	33	69	33	70	51	68	45	40,5
20	71	40	72	41	69	50	66	49	45,0
15	70	49	69	44	68	60	66	49	50,5
30	70	55	67	52	70	57,5	67	63	56,9
35	73	56	72	50	70	58	67	58	55,5
40	71	57	74	47	69	59	67	56	54,8
45	65	35	71	39	69	50	65	51	44,8
50	69	30	68	30,5	71	47	66	42	37,4
55	65	30,5	71	33,5	70	45	65	42,5	37,9
60	69	29	71	39	69	45	65	42	38,8
65	67	31,5	68	39	70	53	67	48,5	43,0
70	68	39	65	40	69	55	67	50	46,0
75	64	41	68	44	71	59,5	66	52	49,1
80	65	37	68	41,7	69	54	67	58	47,9
85	66	39	69	39	70	53	68	54	45,5
90	68	35	70	39	67	49	67	47	42,5

Die letzte Reihe der vorstehenden Zahlen enthält die den vier Beobachtungsreihen von S_2 entsprechenden Mittelwerthe.

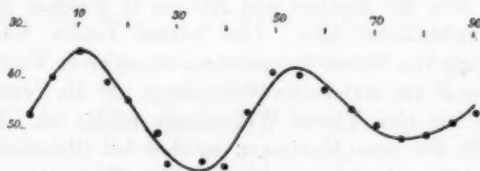


Fig. 2.

Bei der weiteren Bearbeitung dieser Mittel sind die verschiedenen Werthe von S_1 nicht weiter berücksichtigt worden. Denn erstens weichen die aus diesen Grössen gebildeten Mittel nicht sehr voneinander ab, und zweitens lehrten viele Beobachtungen, dass der ursprüngliche, durch S_1 gegebene Zustand des Coherers auf den durch Bestrahlung erzielten Zustand S_2

wenig Einfluss hat, wenn nur nicht zu extreme Anfangsstellungen S_1 verglichen werden.

Trägt man nun die Zahlen für T und das Mittel von S_1 , indem man sie etwa als Millimeter gelten lässt, auf Millimeterpapier auf, so kann man durch die so bestimmten Punkte eine Wellenlinie legen, welche in Fig. 2 etwas verkleinert dargestellt ist und die sich den Beobachtungen gut anschliesst. Die Berge dieser Curve geben die Verstärkungen der beiden Wellenzüge durch die Röhren E und F , die Thäler der Curve entsprechen ihren gegenseitigen Schwächungen und sind die eigentlichen Beweise einer stattgefundenen Interferenz. Da die Curve zwei Berge und zwei Thäler aufweist, so haben wir in den vorliegenden Versuchen zwei Verstärkungen und zwei Schwächungen, sodass der Weg E gegenüber dem Wege F von der Gleichheit bis zu drei halben Wellenlängen gewachsen ist.

In einzelnen Versuchen mit kleineren Erregerkugeln konnten sogar vier Verstärkungen mit den dazwischenliegenden Schwächungen nachgewiesen werden. Der Gangunterschied ist in diesem Falle bis zu drei Wellenlängen angewachsen.

Die abgebildete Curve ist so gezeichnet worden, dass ihre Maxima (mit Sternchen bezeichnet) und Minima bei den Zahlen

$$T = 11^*, 33, 55^*, 77$$

liegen. Dies ist natürlich mehr oder weniger willkürlich, doch lassen die angeführten Beobachtungen kaum einen Zweifel darüber, dass die Maxima und Minima in gleichen Zwischenräumen aufeinanderfolgen. Den letzten Zahlen würde eine Wellenlänge von 88 mm entsprechen, da zu einer Verlängerung des Weges E um eine halbe Wellenlänge nur die Verschiebung derselben um eine Viertel Wellenlänge nöthig ist. Die Zahl $T = 11$ für das erste Maximum, welches bei Gleichheit beider Wege eintritt, stimmt recht gut mit der Thatsache, dass der Apparat ziemlich symmetrisch gebaut ist und die Röhre F um 10 mm herausgezogen war.

Die soeben gefundene Länge der angewandten electrischen Wellen stimmt übrigens auch mit einer Reihe weiterer Versuche, die mit denselben Erregerkugeln angestellt wurden.

Ähnliche Versuche mit Erregerkugeln von 24,4 mm Durchmesser ergaben für die Wellenlänge 82 mm.

III.

Der Gedanke liegt nahe, bei den beschriebenen Versuchen die Röhre E theilweise durch Cylinder von Dielectricis auszufüllen und die hierdurch bewirkte Verschiebung der Verstärkungen und Schwächungen zu messen. Man kann auf diese Weise den Brechungsquotienten des Dielectricums bestimmen. Ich habe solche Versuche mit Paraffin und Schwefel angestellt; hierbei wurden Erregerkugeln von 10,6 mm Durchmesser angewandt und vorerst die Länge der von ihnen ausgesandten Wellen möglichst genau bestimmt. Zu diesem Zwecke wurden eine grosse Anzahl von Beobachtungen ausgeführt, aber nur in der Nähe der Verstärkungen, da mir diese schärfer als die Schwächungen ausgeprägt erschienen. Die Kugeln waren hierbei von der Mitte des ersten Würfels D um 350 mm, von dem Diaphragma um 100 mm entfernt, letzteres hatte eine Oeffnung von 24 mm Durchmesser. Als Entladerkugeln B, B' waren solche von 37 mm Durchmesser angewandt, der Funke in Luft hatte eine Länge von 7 mm, der in Petroleum nur von 0,5 mm. Das zweite U-Rohr F war wie früher um 10 mm herausgezogen.

Im Folgenden sind nur die Mittelwerthe für S_2 angegeben, die Zahl der einzelnen Beobachtungen ist mit N bezeichnet.

Zweites Maximum. S_1 zwischen 70 und 73.

T	N	S_2	Berechnet
40	6	55,4	55,4
45	7	52,1	52,0
50	7	50,5	50,6
55	7	51,3	51,2
60	6	53,9	53,9

Drittes Maximum. S_1 zwischen 70 und 72.

T	N	S_2	Berechnet
80	4	56,5	56,3
85	4	51,1	51,5
90	4	49,6	49,5
95	4	50,6	50,4
100	4	54,1	54,2

Viertes Maximum. S_1 zwischen 70 und 74.

T	N	S_2	Berechnet
120	10	59,7	59,7
125	10	57,4	57,2
130	10	55,4	56,1
135	10	57,3	56,6
140	10	58,3	58,5

Statt der graphischen Methode wurde bei vorstehenden Beobachtungen der Weg der Rechnung eingeschlagen, indem dieselben nach einer quadratischen Formel mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden. Man erhält so:

$$2. \text{ Max. } S_2 = 55,43 - 4,44 \left(\frac{T-40}{5} \right) + 1,015 \left(\frac{T-40}{5} \right)^2$$

$$3. \text{ Max. } S_2 = 56,34 - 6,33 \left(\frac{T-80}{5} \right) + 1,450 \left(\frac{T-80}{5} \right)^2$$

$$4. \text{ Max. } S_2 = 59,70 - 3,29 \left(\frac{T-120}{5} \right) + 0,749 \left(\frac{T-120}{5} \right)^2$$

Mit diesen Formeln sind die angegebenen Werthe von S_2 berechnet; wie man sieht, schliessen sich dieselben den Beobachtungen recht gut an. Für die Lage des Maximums erhält man aus den drei Formeln die Werthe

$$T = 50,9, \quad 90,9, \quad 131,0$$

und aus den zwei ersten dieser Zahlen, welche wohl die genaueren sind, die Wellenlänge gleich 80 mm. Demzufolge muss das erste nicht beobachtete Maximum für

$$T = 50,9 - 40 = 10,9$$

eintreten, in Uebereinstimmung mit dem für andere Erregerkugeln gefundenen Werthe. Für dieses Maximum sind nämlich beide Wege E , F gleich lang, und die Verstärkung tritt für jede Wellenlänge ein. Vernachlässigen wir die Grösse von 0,1 mm, so sind für die kleinsten Erregerkugeln die Maxima und Minima bestimmt durch die Zahlen:

$$T = 11^*, \quad 31, \quad 51^*, \quad 71, \quad 91^*, \quad 111, \quad 131^*.$$

Ich will hier noch bemerken, dass die für meine Erregerkugeln gefundenen Werthe der Wellenlängen nur theilweise mit den von Righi gegebenen Werthen stimmen, der eine andere Art der Interferenz und statt des Coherers eigenthüm-

liche Resonatoren verwandte. Righi gibt nämlich für die von ihm benutzten Erregerkugeln folgende definitive Zahlen:¹⁾

Durchmesser	8	37,5	80 mm
Wellenlänge	26	106	200

während meine Versuche:

Durchmesser	10,6	24,4	39,7 mm
Wellenlänge	80	82	88

ergeben. Die zwei Beobachtungsreihen stimmen nur bei einem Durchmesser von beiläufig 29 mm überein, für welchen beide ungefähr 85 mm als Wellenlänge geben.

In einer früheren Arbeit gibt Righi allerdings für einen Durchmesser von 13,6 mm eine Wellenlänge von 75 mm, ein Resultat, das auch von Garbasso und Aschkinass²⁾ bei ihren Versuchen adoptirt wird.

Ich bemerke noch, dass ich mich davon überzeugete, dass die Werthe der Wellenlängen nicht wesentlich von dem Durchmesser der Entladerkugeln (B , B') beeinflusst werden, indem ich für verschiedene derartige Kugeln nahezu dieselben Werthe der Wellenlängen erhielt. Die beiden geradlinigen Zuleitungen zu diesen Kugeln, von welchen jede 95 mm lang ist, wurden allerdings nicht variirt.

IV.

Die untersuchten Paraffincylinder hatten einen Durchmesser von 56 mm, sodass sie den Querschnitt der geraden Stücke von den Röhren E und F ziemlich genau ausfüllten. Ihre Längen waren sehr verschieden. Mit einem Cylinder, welcher 166,8 mm lang war und sich in dem linken Schenkel des Rohres E befand, wurden beim Verschieben dieser Röhre direct folgende Zahlen gefunden. Die Stellung der einzelnen Apparatheile war hierbei genau die zuletzt angegebene.

T	S_1	S_2	T	S_1	S_2
0	72	46,5	80	71	47,5
5	70	55,5	85	71	53
10	70	63,5	90	71	57
15	71	68	95	72	62

1) Righi, L'éclairage électrique, 3. p. 360. 1895.

2) Garbasso u. Aschkinass, Naturw. Rundschau p. 429. 1894.

T	S_1	S_2	T	S_2	S_3
20	71	62,5	100	70	59
25	70	55	115	70	55
30	69	52	110	70	50
35	70	46	115	67	46
40	69,5	46	120	69	47
45	69	50	125	68,5	47,5
50	69	57	130	70	50
55	69	63,5			
60	70	61,5			
65	70	58			
70	70	53			
75	70	51,5			

Trägt man nun wieder die vorstehenden Zahlen als Abscissen und Ordinaten auf und legt durch die so bestimmten Punkte eine Wellenlinie, wie dies in Fig. 3 dargestellt ist, so findet man für die Maxima und Minima dieser Curve, die sich den Beobachtungen ziemlich gut anschliesst, die Werthe

$T=16, 20+18^*, 40+17, 60+18^*, 80+17, 100+16^*$
oder nahezu

$T=17, 37^*, 57, 77^*, 97, 117^*.$

Dieselben folgen also, wie vorausszusehen, in dem gleichen Intervalle von 20, entsprechend der halben Wellenlänge von

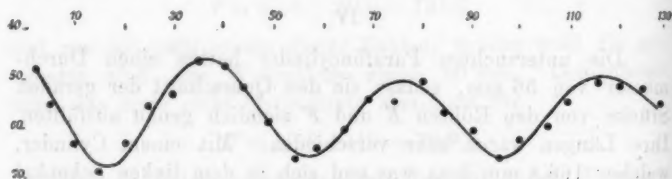


Fig. 3.

40 mm aufeinander. Vergleicht man diese Zahlen mit den für den Fall erhaltenen, wo in der Röhre E bloss Luft vorhanden war, so ergibt sich, dass man jetzt das Rohr E um beiläufig $31-17=14$ mm weniger herauszuziehen braucht, um abwechselnd Verstärkungen und Schwächungen zu erhalten. Dabei können aber die beiden Wege sich noch um eine ganze Anzahl von Wellenlängen unterscheiden. In der That entspricht das früher beim Stande 17 der Röhre E beobachtete Minimum dem zweiten Minimum der bloss mit Luft gefüllten

Röhre E , welches beim Stande 71 derselben eintritt. Die Röhre E muss also um $71 - 17$, d. i. um 54 mm mehr herausgezogen werden, um den gleichen Wegunterschied zwischen E und F zu erhalten wie in dem Falle des Paraffincylinders.

Die Richtigkeit des Gesagten ergibt sich leicht aus Versuchen mit Paraffincylindern von anderen Längen und auch aus einer beiläufigen Kenntniss des Brechungsquotienten μ des Paraffins. Ist nämlich L die Länge des Cylinders und δ die Verschiebung der Röhre, die nöthig ist, um den gleichen Gangunterschied mit Luft allein zu erzielen, so hat man

$$L\mu - L = 2\delta,$$

denn die Ersetzung der Luftsäule L in einem Schenkel des Rohres E durch Paraffin wirkt ja so wie eine Verschiebung dieses Rohres um δ , d. h. wie eine Verlängerung des Weges um 2δ . Es ist also

$$\mu = 1 + \frac{2\delta}{L}$$

und im vorliegenden Falle

$$\mu = 1 + \frac{2 \times 54}{166,8} = 1,648.$$

Dieser Werth von μ ist von vornherein für Paraffin nicht unmöglich, stimmt aber nicht mit Righi's Angaben $\mu = 1,43$, welcher letzterer Werth allerdings auch von anderen Forschern gefunden wurde. Um diese Differenz aufzuklären, habe ich eine grosse Anzahl von Paraffincylindern verschiedenster Länge untersucht, meist aber nur noch grössere Werthe für μ erhalten. So gaben drei Cylinder, welche die Längen 28,30 und 31,8 mm hatten, im Mittel die Lage des ersten Minimums bei Theilstrich 20, woraus $\delta = 11$ und $\mu = 1,733$ folgt. Ein 211 mm langer Cylinder gab für das dem dritten Luftmaximum entsprechende Maximum den Stand 17. In diesem Falle ist also $\delta = 91 - 17 = 74$ und $\mu = 1,701$.

Der vorhergehende Cylinder wurde mit dem ersten von 166,8 mm Länge gleichzeitig benützt, indem je einer der beiden Cylinder in einen der Schenkel der Röhre E gebracht wurde. Die ganze Paraffinlänge betrug so 377,8 mm, und die Lage eines Minimums, welches dem vierten Minimum für Luft entspricht, wurde für $T = 22,5$ gefunden. Dies gibt $\delta = 191 - 22,5 = 168,5$ und $\mu = 1,680$.

V.

Aus Schwefel wurden zwei Cylinder gegossen, die bei einem Durchmesser von 56 mm, bez. 30 und 70,5 mm lang waren. Die Versuche mit denselben boten keine weiteren Schwierigkeiten, nur scheinen die Unterschiede zwischen den Verstärkungen und den Schwächungen jetzt weniger markirt zu sein.

Der erste Cylinder ergab das erste Minimum bei dem Stand 10,5 der Röhre E , was einem Brechungsquotienten $\mu = 2,367$ entspricht. Der zweite Cylinder zeigt ein Minimum für $T = 24$. Dasselbe entspricht dem zweiten Minimum für Luft bei $T = 71$. Es ist also $\delta = 47$ und $\mu = 2,333$.

Auch diese Werthe für den Brechungsquotienten sind viel grösser als der von Righi angegebene Werth $\mu = 1,87$.

5. Ueber einen Crookes'schen Apparat; von H. Pflaum.

Um die Verschiedenheit der electricischen Entladung in einem mässig bez. hoch evacuirten Raume zu zeigen, hatte Crookes¹⁾ unter anderem zwei mit Nr. 7a und 7b bezeichnete birnförmige Glasballons verwendet, welche an Gestalt vollkommen gleich und nur durch den Grad der Luftverdünnung verschieden waren. Während die Luft im ersten Ballon einige Millimeter Spannung hatte, war sie im zweiten äusserst stark verdünnt. (Nach Crookes Angabe bis auf ein Milliontel Atmosphärendruck). In die Ballons waren drei punktförmige Electroden *A*, *B*, *C* und eine hohlspiegelförmige *K* eingeschmolzen. Machte man nun im Apparat 7a nacheinander *A*, *B* oder *C* zur Anode, während *K* jedesmal Kathode blieb, so sah man einen violetten Lichtfaden von der Kathode zur jedesmaligen Anode gehen. Wurde dagegen das gleiche Experiment mit Apparat 7b wiederholt, so trat eine andere, jedesmal aber dieselbe Erscheinung auf, einerlei ob *A*, *B* oder *C* als Anode diente. Aus der hohlspiegelförmigen Kathode strahlte ein nach dem Spiegelcentrum convergirendes Bündel röthlich-violetter Strahlen, welches vom Centrum aus nach der gegenüberliegenden Gefässwand divergirte und hier eine besonders lebhafte Fluorescenz des Glases hervorrief.

Als ich zu Anfang dieses Jahres Gelegenheit hatte mit Apparaten von Leybold in Köln, die nach Crookes Angabe gefertigt und für das hiesige Polytechnikum im Jahre 1880 angeschafft waren, zu experimentiren, sah ich die eben erwähnten Erscheinungen wiederholt. Während der physikalischen Ausstellung, welche in diesem Jahre in Riga veranstaltet wurde, waren auch diese Apparate exponirt. Sie functionirten trotz der sehr starken Benutzung durch das zahlreiche Publicum nach Zufriedenheit. Als ich aber einige Wochen

1) W. Crookes, Strahlende Materie oder der vierte Aggregatzustand. Herausgegeben von Dr. Heinrich Gretschel, Leipzig.

nach der Ausstellung die Apparate revidierte, fand ich, dass 7b unbrauchbar geworden war. Deshalb bestellte ich beim Präzisionsmechaniker F. Ernecke in Berlin die zusammengehörigen Apparate 7a und 7b; der Ballon 7a zeigte auch die oben beschriebene Erscheinung, — 7b dagegen eine von der erwarteten so vollkommen abweichende, dass ich es für geboten halte, eine Beschreibung derselben der Öffentlichkeit zu übergeben.

Hat man *K* zur Kathode, *A*, *B* oder *C* zur Anode gemacht, so sieht man ein gelblichgraues geschichtetes Licht

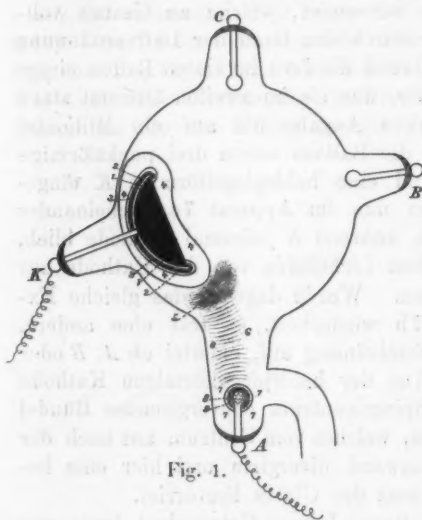


Fig. 1.

von der jedesmaligen Anode zur Kathode übergehen, während die schalenförmige Kathode sich vollkommen mit einem bläulichweissen Lichtschimmer bedeckt. Soviel zeigt sich also schon bei oberflächlicher Betrachtung, dass die Lage der Anode durchaus nicht gleichgültig für die Form der Lichterscheinung ist.¹⁾ Ausserdem ist diestechnisch grüne Fluorescenz des Glases an den der Kathode gegenüberliegenden Stellen um nichts

intensiver, als an allen sonstigen Stellen, an denen sie auftritt, so z. B. auch hinter der Kathode zwischen *A* und *K* oder zwischen *C* und *K*. Von der Erscheinung, welche man im Ballon mit mässig verdünnter Luft wahrnimmt, ist die in Rede stehende durchaus verschieden.

1) Die Versuchsbedingungen waren die Folgenden: Eine 4paarige Accumulatorbatterie lieferte den primären Strom von 3,9—4,6 Amp.; der Induktionsstrom wurde von einem grossen Inductorium mit Platinunterbrecher (74 mm Funkenlänge) gegeben. Die Beobachtungen wurden in einem vollkommen verdunkelten Raume angestellt, um auch die zartesten Lichtdetails wahrnehmen zu können.

Bei einer sorgfältigen Beobachtung kann man folgende Details der Lichterscheinung unterscheiden (vgl. Fig. 1). Unmittelbar an die schalenförmige Kathode schliesst sich eine ca. 0,8 mm dicke Schicht weissen Lichts an (1), die an der Rückseite der Schale sehr deutlich wahrnehmbar ist. Hieran schliesst sich eine dunkle, ebenso dicke Schicht (2). Auf diese dunkle folgt wieder eine helle weisse Schicht (3) von 1 bis $1\frac{1}{2}$ mm Dicke und an letztere grenzt ein matteres Licht (4), das continuirlich schwächer wird, sich hinter der Kathode (in der Figur nach links) bis an die Gefässwand verfolgen lässt, während es sich vor der Kathode bei continuirlichem Verwaschenerwerden auf fast einen Centimeter ausdehnt. — Nach der Anode hin schliesst sich an diesen Lichtschimmer eine äusserst dunkle Partie (5) — offenbar der *Trennungsraum* nach E. Wiedemann's Bezeichnung, worauf dann bis zur Anode 12—15 gegen die Anode concave gelblichgraue, inlebhafte Vibration befindliche Lichtwölkchen (Schichtungen) von ungleicher Dicke und Abstand folgen.¹⁾ Die Schichtungen sind zu beiden Seiten von einem sehr schwachen dunkelvioletten Lichtschimmer begrenzt (6). Die der Anode nächsten Schich-



Fig. 2.

1) Die Lage, gegenseitige Entfernung und Anzahl zeigt sich abhängig von der Stärke des Inductionstromes. Bei stärker werdendem Strome ziehen sie sich immer weiter zur Kathode hin, bei schwächer werdendem rücken sie nach der Anode zusammen.

tungen scheinen so nahe zusammengedrückt, dass sie fast unmerklich in einen mattgrauen ruhenden Lichtschimmer übergehen, der sich bis hinter die punktförmige Anode erstreckt (7). Inmitten dieses Schimmers liegt die Anode, umgeben von einer helleren Schicht (8), an die sich eine dunklere (9) schliesst. Unmittelbar um die Anode lagert eine sehr helle weisse Aureole, deren Licht wiederum unruhig, wie flackernd, erscheint. — Macht man an Stelle von *A* die Electroden *B* oder *C* zur Anode, so sind die Schichtungen nach *B* oder *C* gerichtet, im übrigen aber bleibt die Erscheinung die beschriebene.

Erwähnenswerth ist noch die Lichterscheinung, welche sich zeigt, wenn *K* zur Anode und beispielsweise *A* zur Kathode gemacht wird (vgl. Fig. 2). Die schalenförmige Anode ist dann wiederum, wie vorhin die Kathode, von einem Lichtschimmer umgeben, in welchem man dieselben Theile (vgl. Fig. 1, 1—4) unterscheiden kann. Auf den dunklen Trennungsraum folgt aber jetzt ein continuirliches Licht, das zur Kathode hin immer heller wird. Die punktförmige Kathode hat hier dasselbe Aussehen, wie beim ersten Versuche die punktförmige Anode, d. h. um die flackernde Aureole zieht sich ein dunkler, um diesen ein heller Kreis. Schichtungen sieht man jetzt nirgend; die Fluorescenz des Glases bleibt dieselbe, wie früher. Dann und wann löst sich von der Kathode ein Fünkchen los, alsdann sieht man ein zuckendes Aufleuchten des Lichtschimmers zwischen Kathode und Trennungsraum. Von mehreren photographischen Aufnahmen des Apparates ist nur eine soweit gelungen, dass sie diesen Zeilen beigegeben werden konnte (Fig. 2); sie zeigt bei weitem weniger, als man mit blossem Auge sieht, und ultraviolette Licht, dessen Theilnahme an der Erscheinung man etwa vermuthen könnte, macht sich auf keinem der erhaltenen Negative wahrnehmbar.

Riga, October 1895.

6. Fluorescenz des Natrium- und Kaliumdampfes und Bedeutung dieser Thatsache für die Astrophysik; von E. Wiedemann und G. C. Schmidt.

Auf ungemischten Dämpfen ist eine Fluorescenz nachgewiesen für den Joddampf von E. v. Lommel¹⁾, von uns für die Dämpfe zahlreicher organischer Substanzen.²⁾ Bei unseren neuen Versuche wollten wir das Verhalten von *Metalldämpfen* in dieser Hinsicht studiren.

1. Versuchsanordnung.

Zu den Versuchen diente folgende *Anordnung* (Fig. 1). Die von der Sonne kommenden Strahlen fielen auf eine Linse *L* von ca. 25 cm Brenn-

weite, die sie zu einem schmalen Strahlenbündel σ vereint, das die mit Dampf erfüllte Kugel *K* durchsetzt. Seitlich von der Kugel befand sich der horizontal gestellte Spalt eines Spectralapparates. Die Kante des

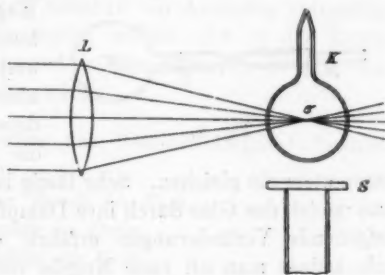


Fig. 1.

Prismas lag selbstverständlich ebenfalls horizontal. Der Spectralapparat war mit seinem Fuss an einem verticalen Brett befestigt. Er konnte mit Hülfe eines Conus im Innern des Fusses um seine Axe gedreht werden. So konnte man das Collimatorfernrohr auf den in der Kugel auftretenden Kegel von Fluorescenzlicht richten.

Die Metalldämpfe befanden sich, wie erwähnt, in Kugeln und zwar, je nach den Umständen aus schwer oder leicht

1) E. v. Lommel, Wied. Ann. 19. p. 356. 1883.

2) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 56. p. 18. 1895.

schmelzbarem Glase, die evacuirt wurden. Durch den Ansatz *h* (Fig. 2) waren sie zunächst mit der Quecksilberpumpe verbunden; nach dem Abschmelzen werden sie mit ihm in ein Stativ eingeklemmt. In die Kugeln aus hartem Glas wurden die Metalle in folgender Weise eingebracht. Zuerst wurde eine kleine Menge Metall in die Kugel hineingeworfen, dann der Hals *h* derselben ausgezogen und in sein Ende ein weiches Glasrohr *g* eingekittet, das an einen mit der Hg-Pumpe verbundenen Schliff angeschmolzen war. Das Metall brachte man dann an die Stelle *a*, erhitze unter fortwährendem Pumpen gelinde, um alle Feuchtigkeit und alle Kohlenwasserstoffe zu entfernen. In einzelnen Fällen spülte man die Kugel auch mehrfach mit Wasserstoff aus.

Kugeln aus weichem Glase wurden direct an die Pumpe angeschmolzen.

Bei den meisten Versuchen war der Durchmesser der Kugel 5 cm, die ganze Kugel konnte leicht mit einer Flamme umspült werden. Wir haben aber auch Kugeln von anderen Dimensionen benutzt, die optischen Erscheinungen



Fig. 2.

waren stets die gleichen. Sehr lästig ist bei den Alkalimetallen, dass meist das Glas durch ihre Dämpfe schon nach kurzer Zeit tiefgehende Veränderungen erfährt; es bräunt und schwärzt sich, sodass man oft neue Kugeln verwenden muss.

2. Resultate über die Fluorescenz.

Die Versuche ergaben: *Natrium- und Kaliumdampf fluoresciren hell und zwar ersterer grün, letzterer intensiv roth.*

Bei Dämpfen dieser Metalle ist auch in dem Licht einer Bogenlampe die Fluorescenz sehr schön zu sehen.

An Dämpfen von schwerflüchtigen Metallen konnten wir bisher noch nicht mit vollkommener Sicherheit eine Fluorescenz nachweisen, indess schien der *Cadmiumdampf* unmittelbar an der siedenden Metalloberfläche eine *grüne* Fluorescenzfarbe zu zeigen. Das Misslingen der einschlägigen Versuche beruht jedenfalls zum Theil auf der geringen Intensität der Strahlen der Wintersonne. Wir werden selbstverständlich die Versuche

nach dieser, wie nach anderen Richtungen im Sommer wieder aufnehmen.

Natrium.

Das Fluorescenzspectrum des *Natriumdampfes* zeigt folgendes:

675 Grenze des Roth.

675—602,5 helles rothes Band.

602,5—540 dunkle Bande.

540—496 grüne cannellirte Bande, die sich aus einzelnen dunklen und hellen Streifen zusammensetzt.

Weiter im Blau ist fast nichts zu sehen.

Ferner tritt am weniger brechbaren Ende der dunklen Bande 602—540 *hell die gelbe Natriumlinie auf*.

Das Auftreten der hellen Natriumlinie rührt nicht etwa von der erwärmenden Flamme her; denn auch, wenn letztere entfernt wurde, blieb sie hell sichtbar, ihr Auftreten entspricht auch nicht chemischen Processen, welche sich in der Kugel abspielen, denn sie verschwand in dem Moment, in dem das erregende Licht abgeblendet wurde.

Das Fluorescenzspectrum des Natriumdampfes ¹⁾ besteht demnach aus drei Theilen:

1. *Der nichtcancellirten Bande im Roth,*
2. *der cancellirten Bande im Grün,*
3. *der hellen Natriumlinie im Gelb.*

Während bei den festen und flüssigen fluorescirenden Körpern die Fluorescenzspectra aus breiten verwaschenen continuirlichen Streifen bestehen, begegnen wir hier auch *cancellirten Banden*, wie sie andere Gase unter dem Einfluss der electrischen Entladungen zeigen und *einzelnen Linien*.

1) Eine Vergleichung dieser Fluorescenzspectra mit den Spectren, die bei einer Erwärmung vom Natriumdampf auftreten (Evershed, Phil. Mag. (5) **39**. p. 460. 1895), ergibt gewisse Beziehungen; dasselbe ist der Fall, wenn man die Lage der Fluorescenzspectra mit den von H. E. Roscoe u. A. Schuster (Proc. Roy. Soc. Lond. **22**. p. 262. 1894) bestimmten Absorptionsbandenspectra zusammenstellt und zwar sowohl beim Natrium wie beim Kalium; in beiden Fällen erscheint die Emission nach dem Roth verschoben.

Kalium.

Das Fluorescenzspectrum des *Kaliums* zeigt bei 695—615 ein *intensiv rothes Band*.

An das Band schliesst sich Dunkelheit an, in der das grün etwas heller auftritt, vielleicht in Folge der Gegenwart von etwas Natriumdampf.

Die hellen Kaliumlinien konnten nicht nachgewiesen werden, indess mag ihr Fehlen von mangelnder Intensität des einfallenden Lichtes herrühren.

Lithium.

Das Fluorescenzspectrum des *Lithiums* liess sich leider nicht beobachten, da dies Metall, sobald es in Glasgefässen erhitzt wird, das Glas unter Lichterscheinung angreift. Der beim weiteren Erhitzen sich entwickelnde Dampf zeigt nur das grüne Fluorescenzlicht des Natriums. Aus demselben Grunde scheiterten auch Versuche eine Electroluminescenz des Lithiums in Entladungsröhren zu erhalten.

Mit den Fluorescenzspectren des Natrium- und Kaliumdampfes hängen vielleicht auch zusammen die continuirlichen Emissionsspectren in der Flamme, wie sie von Bunsen und Kirchhoff beim Einbringen von Salzen des betreffenden Metalles, von Lockyer bei dem Einbringen des Metalles selbst beobachtet wurden.

So zahlreiche verschiedene Formen der Spectra wie bei dem Natrium, sind unter den Metallen bisher nur bei dem Quecksilber beobachtet worden, bei dem ein Banden-, ein oder wahrscheinlich zwei Linienspectren und ein continuirliches Spectrum gefunden worden sind; dieselben treten je nach dem verschiedenen Dampfdruck und der Stärke der Erregung auf (vgl. hierzu Eder und Valenta¹⁾ und eine demnächst in den Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen erscheinende Arbeit).

3. Electroluminescenz von Natrium und Kalium.

Frühere Versuche über die Luminescenz von Dämpfen organischer Substanzen hatten uns gezeigt, dass mit der Photo-

2) J. M. Eder u. A. Valenta, Wied. Ann. 55. p. 419. 1895.

luminescenz eine entsprechende Electroluminescenz Hand in Hand geht. Wir haben versucht, eine analoge Erscheinung bei den Dämpfen des Natriums und Kaliums nachzuweisen.

Metallisches Natrium und Kalium wurden in ein ca. 1 cm weites Rohr aus schwer schmelzbarem Glase gebracht, in seine beiden Enden waren eingekittet einmal ein Metalldraht als die eine Electrode und dann ein \perp Stück und zwar mit dem einen horizontalen Ende; in das andere horizontale Ende des \perp war die zweite Electrode befestigt; der vertikale Arm war mit der Quecksilberpumpe verbunden. Als Electricitätsquelle diente eine Influenzmaschine. War durch Erhitzen ein passender Dampfdruck hergestellt und werden durch eine kleine eingeschaltete Funkenstrecke oscillatorische Entladungen erzeugt, die durch den Dampf und nicht durch das Glas gehen, so beobachtet man neben den Metalllinien folgende continuirliche Banden:

Natrium: 535—480. Das Band zeigte, abweichend von dem in dem Fluorescenzlicht auftretenden, keine Cannellirung.

Kalium: 665—625. Das Band zeigte wie die in dem Fluorescenzlicht auftretende, keine Cannellirung.

Die Lage der Electroluminescenzbanden entspricht ungefähr derjenigen der Fluorescenzbanden.

J. N. Lockyer¹⁾ hat ganz beiläufig das Auftreten einer blutrothen Färbung in einer Kalium enthaltenden Entladungsröhre erwähnt, die nicht von der rothen K-Linie herrührt; von einem continuirlichen Band spricht er aber nicht.

4. Gültigkeit der Stokes'schen Regel für das Fluorescenzlicht der Metalldämpfe.

Wir haben auch zu prüfen gesucht, ob die Stokes'sche Regel für Metalldämpfe gültig ist, d. h. ob das erregte Licht weniger brechbar ist als das erregende. Dazu wurde aus einem durch ein Prisma entworfenen Spectrum ein ziemlich schmaler Streifen ausgeblendet und durch eine Linse in der mit Dampf erfüllten Kugel vereint.

Bei Natriumdampf wurde das intensiv grüne emittirte Licht vor allem durch grünblaue Strahlen erregt, das rothe durch

1) J. N. Lockyer, Chemistry of the Sun. p. 301.

gelbe und rothe Strahlen. Bei Kaliumdampf erregt *rothes* Licht das *tiefrothe* emittirte Licht.

Diese Versuche zeigen, dass wenigstens *keine grossen Abweichungen von der Stokes'schen Regel vorhanden sind.*

5. Astrophysikalische Anwendungen.

Wir möchten mit wenigen Worten auf die Bedeutung der obigen Beobachtung, dass Metaldämpfe fluoresciren, für astrophysikalische Probleme hinweisen.

Wir wissen, dass in der Sonnenatmosphäre Dämpfe der verschiedensten Metalle enthalten sind, welche von der Sonne bestrahlt werden, sie müssen also fluoresciren und zwar sehr hell. Dabei dürfen wir nicht vergessen, dass die Intensität des erregenden Lichtes in der Sonnennähe viel grösser ist als an der Erdoberfläche, also auch diejenige des Fluorescenzlichtes. Diese Fluorescenzstrahlung kann nicht dem Kirchhoffschen Gesetz gehorchen.

Das emittirte Fluorescenzlicht muss sich zusammensetzen aus continuirlichen und cannellirten Banden und aus einzelnen Linien. Bei einem Gemisch vieler Metalle vereinen erstere sich zu einem continuirlichen Spectrum, die feinen, manchmal schwer erkennbaren Cannellirungen verschiedener Substanzen lagern sich über einander und verschwinden. Die scharfen Linien bleiben dagegen einzeln sichtbar: so dürfte sich z. B. am einfachsten das Spectrum der Corona, welches aus einem continuirlichen Spectrum und aus einzelnen hellen Linien besteht, zu denen sich noch ganz schwach mehrere Fraunhofer'sche Linien gesellen, erklären. Die letzteren rühren von in der Corona diffus reflectirtem Licht her. Hiernach braucht man keine fortdauernde Erregung zum Leuchten durch electriche Schwingungen anzunehmen; Erregungen, die indess in vielen Fällen gewiss eine hervorragende Rolle spielen. Anwendungen der Resultate auf die Theorie der Chromosphäre, gewisser Formen der Protuberanzen etc, liegen nahe.

Besonderer Discussionen wird es aber bei allen astrophysikalischen und anderen Strahlungserscheinungen bedürfen nicht nur in der Hinsicht, welche Theile der Strahlung von einer Temperaturerhöhung allein herrühren, und welche von einer Luminescenz bedingt sind, sondern es wird auch im speciellen

festzustellen sein, wann eine Photoluminescenz, also eine Fluorescenz auftritt. In diesem Fall liegen die Verhältnisse relativ einfach und für den Versuch am leichtesten zugänglich.

6. Allgemeine Bemerkungen.

Der von uns untersuchte Fall der Fluorescenz der verdünnten Kalium- und Natriumdämpfe dürfte der möglichst einfachste sein. Einmal sind die leuchtenden Molecüle des untersuchten Körpers im Dampfzustande fast unbeeinflusst von der Wirkung der Nachbarmolecüle; dies ist nur nicht der Fall in den kurzen Zeiten, während deren sich zwei oder mehr Molecüle in ihren gegenseitigen Wirkungssphären befinden, dann verhalten sie sich ähnlich, wie Molecüle im festen und flüssigen Zustand. Ferner ist der Natrium- und Kaliumdampf *einatomig*, soweit sich wenigstens aus den bisher festgestellten Dampfdichten ergibt. Dass bei diesen Dämpfen sowohl Banden- als Linienspectren auftreten, muss für die theoretischen Untersuchungen über Fluorescenz einen neuen Ausgangspunkt geben, vor allem, wenn man auf die der Fluorescenz zu Grunde liegenden intramolecularen Vorgänge eingehen will.

7. Resultat.

Natrium- und Kaliumdampf fluoresciren hell, ersterer grün, letzterer roth. In dem Fluorescenzspectrum des Natriumdampfes treten continuirliche und cannellirte Banden, sowie die gelbe Natriumlinie auf.

Natrium- und Kaliumdampf zeigen auch bei Electroluminescenz continuirliche Banden im Grün bez. Roth.

Für die Fluorescenz der Metaldämpfe gilt wahrscheinlich die Stokes'sche Regel.

Die Fluorescenz der Metaldämpfe gibt ein Mittel eine Reihe astrophysikalischer Erscheinungen zu erklären.

Die Untersuchung soll im Sommer fortgesetzt werden.

Erlangen, 20. October 1895.

**7. Entladungserscheinungen in
verdünnten Metalldämpfen; von E. Wiedemann
und G. C. Schmidt.**

Während die an der Anode und Kathode, sowie in der positiven Lichtsäule in einem Entladungsrohr auftretenden Erscheinungen (Schichtung, dunkler Raum, Glimmlicht, Kathodenstrahlen) bei an sich gasförmigen Substanzen mannigfach untersucht worden sind, so ist dies bei Metalldämpfen noch fast gar nicht geschehen.¹⁾

Und doch versprechen gerade solche Versuche manche interessante Aufschlüsse. Bei vielen Metallen ist durch Dampfdichtebestimmungen nachgewiesen, dass ihre Molecüle einatomig sind; Aenderungen in den Spectren eines solchen Metalldampfes unter verschiedenen Umständen sind daher im allgemeinen nicht aus dem Zerfall der Molecüle in Atome, sondern aus den verschiedenen Temperaturen der leuchtenden Theilchen oder aus der verschiedenen Art der Anregung zu erklären. Nur unter ganz bestimmten Umständen müssen wir auf eine Aneinanderlagerung mehrerer Atome zu grösseren Molecülen, etwa zu liquidogenen Molecülen im Sinne de Heens, Rücksicht nehmen.

Versuchsanordnung.

Die Metalldämpfe befanden sich in Glaskugeln und zwar, je nach den Umständen in schwer oder leicht schmelzbaren, die evacuirt wurden. Die Art des Einbringens der Metalle in die Kugeln geschah in der p. 448 beschriebenen Weise.

Zur Zufuhr der Electricität zu den in der Kugel *K* enthaltenen Metalldämpfen dienten zwei mit Drahtnetz überzogene Ringe *R* und *R'* (Fig. 1) von etwa 6 cm Durchmesser. Dieselben wurden entweder direct mit den etwa 2—3 mm voneinander abstehenden Polkugeln einer Influenzmaschine verbunden, oder sie bildeten die Endcondensatoren eines Lecher'schen

1) Einige, wenige Versuche an Quecksilber liegen vor von A. Schuster, Proc. Roy. Soc. **37**. p. 318. 1884, E. Warburg, Wied. Ann. **40**. p. 12. 1890.

Drahtsystems. Die Drahtnetze waren auf 2 Schlitten befestigt, und konnten der Kugel genähert oder von ihr entfernt werden. Durch eine Flamme wurden die Glaskugeln zwischen den Drahtnetzen erhitzt.

Gang der Erscheinungen bei directer Verbindung der Endcondensatoren mit der Maschine.

Legt man die Ringe direct an die kalte Glaskugel an, so springen zunächst zwischen den Polkugeln der Maschine Funken über. Dadurch, dass hier die Electricitäten sich ausgleichen können, wird ein Durchschlagen der Kugel vermieden, ehe durch Erwärmen die Leitfähigkeit des Glases so hoch gestiegen war, dass durch dasselbe eine stetige Zufuhr von Electricität zu dem Metaldampfe eintreten kann. Beim weiteren Erhitzen gleicht sich die Electricität in stetigem Strom durch das leitend gewordene Glas aus. Sobald man aber die Ringe R ein wenig von der Glaswand abrückt, sodass Fünkchen von den Ringen auf die Glaswand überspringen, leuchtet das Gas hell auf und zeigt bei passender Wahl des Abstandes der Ringe, also der Funkenstrecken und bei einem durch Erhitzen passend gemachten Druck alle charakteristischen Entladungserscheinungen:

erste Kathodenschicht, Goldstein's dunkler Kathodenraum (zweite Kathodenschicht), Glimmlightschicht (dritte Kathodenschicht), dunkler Trennungsraum, positive Lichtsäule.

Mit abnehmender Temperatur und also abnehmendem Druck bez. bei constanter Temperatur und zunehmender Evacuation treten bei den Metaldämpfen die auch sonst beobachteten Phänomene ein: Zunahme der Dicke des dunklen Raumes, stärkere Entwicklung der Glimmlightschicht, Zurückweichen des positiven Lichtes.

Die Erscheinungen, wie sie bei passendem Druck eintreten, sind in Fig. 2 wiedergegeben. k ist die mehr oder weniger entwickelte erste Schicht und g die Glimmlightschicht. Der nach der Kathode zu gelegene Theil g_1 derselben ist oft anders gefärbt als der nach der Anode zugekehrte g_2 . d ist der dunkle Trennungsraum und p das positive Lichtbündel, das in vielen

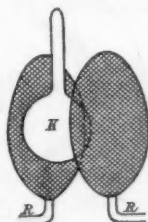


Fig. 1.

Fällen wundervoll geschichtet erscheint. Fast stets haben die Kuppen der Schichten eine andere Farbe als der hintere Theil derselben.

Dass wir bei diesen Versuchen in dem *Gase*, trotzdem es von einer *leitenden Glashülle* umgeben ist, einen Electricitätsdurchgang und ein Leuchten beobachten, folgt aus dem allgemeinen Verhalten von Gasen und gewöhnlichen Leitern gegenüber von Oscillationen.

Liegen die Metallnetze unmittelbar an der stark erhitzten Kugel an, so geht der nahezu constante Strom durch die Glaswände, rückt man die Netze etwas von der Wand ab, so springen auf dieselbe kleine Funken über, d. h. es tritt eine oscillatorische Entladung ein und diese geht durch das leitende

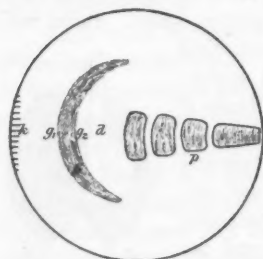


Fig. 2.

Glas zu den Metaldämpfen im Innern desselben und bringt das Gas zum Leuchten, bez. regt zunächst die Molecüle so an, dass sie unter Absorption von electrischer Energie leuchten können. Soweit sonst Erfahrungen vorliegen, treten aber, wenn Funkenstrecken sich in einem Stromkreis befinden, meist nicht die normalen Entladungserscheinungen auf, sondern unregel-

mässig verwaschene. Wenn trotzdem hier oft das typische Bild auf das schönste entwickelt ist, so liegt das daran, dass in Folge des immerhin grossen Widerstandes des Glases das Zuströmen der Electricität zu dem angeregten Gase so langsam erfolgt, dass wir die normale Entladung erhalten können.¹⁾

Die Thatsache, dass Oscillationen ein im Innern eines Leiters eingeschlossenes Gas zum Leuchten bringen, ermöglicht überhaupt die Benutzung der obigen Versuchsanordnung.²⁾

Versuche, in gewöhnlichen Entladungsröhren mit *eingeschmolzenen* oder *eingekitteten* Electroden in Metaldämpfen die Entladungserscheinungen zu erhalten, scheiterten, denn war soweit erhitzt, dass hinlänglich viel Metaldampf sich ent-

1) Vgl. E. Wiedemann, Wied. Ann. 20. p. 760. 1883.

2) E. Wiedemann, Verhandl. d. deutschen Naturforscherversammlung in Lübeck p. 45.

wickelt hatte, so ging ohne eingeschaltete Funkenstrecke die Entladung durch das Glas; mit eingeschalteter Funkenstrecke ging der Strom wohl durch das Gas, ohne aber die typischen Phänomene hervorzurufen.

In einzelnen Fällen haben wir die beiden Drahtnetzplatten als Enden eines überbrückten Lecher'schen Drahtsystems benutzt, die Metaldämpfe also der Wirkung regelmässiger schwach gedämpfter Oscillationen ausgesetzt; wie bei allen anderen Gasen treten auf *beiden Seiten* die Kathodenerscheinungen auf; in der Mitte das positive Licht.¹⁾

Wir beschreiben in Folgendem die Erscheinungen nur bei denjenigen Metallen genauer, bei denen sie leicht zu erhalten sind und bei denen sich charakteristische Färbungen zeigen. Kleine Aenderungen in der Farbe treten bei veränderter Dampfmenge durch verschiedenes starkes Erhitzen auf. In der Hauptsache ergeben sich folgende Resultate.

Natrium, *k* orange, *g* weisslich, *p* gelb.

Kalium, *h* etc. weisslich, *p* purpur.

Magnesium, alles intensiv grün.

Thallium, *k* etc. weisslich blau, *p* grün.

Cadmium, *k* grünblau bis violett, *g*₁ rosa, *g*₂ violett, *p* im Ganzen grün, die Kuppen der Schichten grün, die hinteren Stellen violett. Am linienärmsten ist das positive Licht, am linienreichsten das Glimmlicht, in der Mitte steht das der ersten Kathodenschicht.

Zink, *k* blau, *g*₁ röthlich, *g*₂ purpur, *p* röthlich, die Kuppen der Schichten sind violett, die hinteren Theile röthlich. Am linienreichsten ist das Glimmlicht.

Bei *Zink* und *Cadmium* sind die auftretenden Gebilde besonders *farbenprächtig*.

Quecksilber, Unterschiede zwischen Anode und Kathode sind wohl vorhanden, indessen nur klein; im Spectrum des positiven Lichts tritt ein schon von E. Warburg beobachtetes continuirliches Band im Grün auf.

Arsen, *k* weisslich, *g* bläulich, *p* grünlich.

Tellur, alles bläulich.

1) E. Wiedemann u. H. Ebert, Physikal.-med. Soc. Erlangen. 8. Febr. 1892; Wied. Ann. 50. p. 33. 1893.

Bei einer Reihe der oben aufgeführten *einatomigen* Metaldämpfe treten die typischen Unterschiede zwischen Anoden- und Kathodenerscheinungen auf das deutlichste hervor. In gewöhnlichen Entladungsröhren mit eingeschmolzenen Electroden hat A. Schuster dieselben beim *einatomigen* Quecksilber nicht beobachten können. Indessen sind auch in diesem Fall Differenzen im Aussehen und im Spectrum vorhanden, wie wir, wie schon früher Hr. Warburg, feststellen konnten; sie machen sich indess nur relativ wenig geltend, da die Farbe des Lichtes an den verschiedenen Stellen nahezu die gleiche ist.

Resultate.

1. In einer erhitzten leitenden Glaskugel können durch oscillatorische Entladungen verdünnte Metaldämpfe zum Leuchten gebracht werden.

2. In Metaldämpfen und zwar auch bei *einatomigen* treten die typischen Entladungserscheinungen auf. Farbe und Spectrum der ersten und dritten Glimmlichtschicht sowie des positiven Lichtes sind wesentlich verschieden.

8. *Eine allgemeine Gedächtnissregel für Richtungsbestimmungen im electromagnetischen Felde; von L. Zehnder.*

Die mannichfaltigen für Richtungsbestimmungen im electromagnetischen Felde vorgeschlagenen Regeln stellen an das Gedächtniss oft ziemliche Anforderungen, besonders für diejenigen, welche Jahre lang nicht in den Fall kommen, solche Richtungsbestimmungen wirklich ausführen zu müssen. Es dürfte deshalb mein Versuch gerechtfertigt erscheinen, unter möglichster Entlastung des Gedächtnisses alle jene Regeln in eine einzige allgemeine Gedächtnissregel zusammenzufassen, welche freilich zu ihrer correcten Anwendung etwas mehr Denkarbeit erfordert.

Die Kenntniss der allgemeinen Gesetze, welche für die Bewegungsrichtungen maassgebend sind, müssen wir soweit voraussetzen, dass nur noch die Beantwortung der Frage nach dem positiven bez. negativen Sinne der betreffenden Richtung übrig bleibt. Die Kraftlinien betrachten wir im Sinne der Maxwell'schen Theorie stets als geschlossene Curven, auch bei permanenten Magneten; ihre Zahl ist in bekannter Weise durch den Inductionsfluss gegeben.¹⁾

A. Drahtkreise.

Die Regel bezieht sich in jedem Falle nur auf diejenigen Kraftlinien, welche das *Innere* des Drahtkreises durchsetzen.

In Uebereinstimmung mit der gegenwärtig (insbesondere in Electrotechnikerkreisen) gebräuchlichen Bezeichnungsweise belegen wir mit dem positiven Vorzeichen:

1. *die Richtung der aus dem Nordpol eines Magnets austretenden Kraftlinien;*

1) Vgl. Drude, Physik des Aethers, p. 46. Stuttgart 1894.

2. das *Kreisen der positiven Electricität im Sinne des Uhrzeigers*¹;
sodann aus mnemotechnischen Gründen:

3. die *Vermehrung der Kraftlinienzahl* (bez. *Erzeugung* von Kraftlinien).

Nun lautet die allgemeine Regel:

Für die Richtungsbestimmungen eines inducirten electischen Stromes sind die drei Vorzeichen negativ, für die übrigen Richtungsbestimmungen sind sie positiv zu nehmen.

Bemerkung: Gleichzeitiger Wechsel von zwei Vorzeichen ändert das Resultat nicht.

Anwendungen.

a) Richtung der Kraftlinien im Magnetfelde eines Stromes (+ + +) oder (— — —): Der *positiv* kreisende Strom erzeugt *positiv* gerichtete Kraftlinien (im Drahtkreisinneren).² Die *Schrichtung* ist implicite in den Regeln enthalten (vgl. Anm. 1).

b) Im Magnetfelde inducirter Strom (— — —) oder (+ + —): *Vermehrung der positiv* gerichteten Kraftlinien (des Drahtkreisinneren) inducirt einen *negativ* kreisenden Strom.

c) Ponderomotorische Wirkung im Magnetfelde (+ + +) oder (— — —): Bewegung tritt so ein, dass bei *positiv* kreisendem Strome die *positiv* gerichteten Kraftlinien (im Drahtkreisinneren) *vermehrt* werden.

Ein starrer Drahtkreis wird als Ganzes bewegt, ein *elastischer* Leiterkreis (vgl. Leiterelemente, Ergänzungskreis) kann erweitert oder verengt werden.

B. Leiterelemente

werden von dem Standpunkte aus, dass es nur geschlossene Ströme gibt, zweckmässig unter denselben Gesichtspunkten wie die Drahtkreise behandelt, wie folgt:

1) Sobald für den Beobachter der Uhrzeiger wirklich die *Uhr zeigt*, kann von einer Zweideutigkeit hier nicht mehr die Rede sein; nur dann aber ist die Benennung „Uhrzeiger“ gerechtfertigt.

2) Wichtige *Variante:* Das Resultat bleibt bei Vertauschung zweier Vorzeichen bestehen, wenn z. B. der positive Strom mit den positiven Kraftlinien vertauscht wird. Dann lautet die allgemeine Regel auf diesen Fall a) angewandt: Blickt man in der Richtung des *positiven* Stromes, so *kreisen* die durch ihn *erzeugten* Kraftlinien im *positiven* Sinne um denselben.

Durch successive Aneinanderreihung von ganz gleich beeinflussten benachbarten Leiterelementen bilde man einen („elastischen“, vgl. c) p. 460) **Ergänzungskreis** und wende auf diesen die allgemeine Regel an.

Berücksichtigung einer vorhandenen magnetischen Axe oder einer vollständigen Symmetrielinie des Magnetfeldes wird den verlangten Ergänzungskreis sofort erkennen lassen.

Der Faraday-Maxwell'schen Nahewirkungstheorie entsprechend ist die Electroinduction als specieller Fall von Magnetoinduction zu behandeln. Zwei parallele Drähte denkt man sich als Theile von zwei concentrischen sehr grossen Kreisen; dann erhält man leicht die Ampère'schen Gesetze für die Anziehung bez. Abstossung paralleler Ströme aus der allgemeinen Regel.

Freiburg i. Br., December 1895.

9. *Ein älteres Analogon zu den Röntgen'schen Strahlungsversuchen; von W. Holtz.*

Die Röntgen'schen Versuche haben mich daran erinnert, dass ich schon im Jahre 1880 auf eine analoge Thatsache stiess, als ich die Strahlung des electrischen Glimmlichts in der Luft untersuchte, worüber ich in den Göttinger Akademieberichten eine Reihe von Notizen veröffentlicht habe.¹⁾ Es zeigte sich nämlich, dass in den Strahlen solchen Glimmlichts, wie man es z. B. erhält, wenn man eine mit Seide bedeckte Scheibe einer Spitze gegenüberstellt, im Allgemeinen nur leitende Körper einen Schatten werfen, nicht jedoch Isolatoren, als ob diese für die Strahlen permeabel wären. Ich sagte auch in meiner ersten Mittheilung (p. 555), dass ich glaube, dass dies so sei. In der zweiten Mittheilung (p. 606) bin ich dann freilich davon abgewichen, da mir diese Vorstellung nach dem damaligen Stande der Wissenschaft doch all zu wunderbar schien. Heute aber möchte ich annehmen, dass meine erste Ansicht doch die richtige war, und also das Glimmlicht in der Luft mit dem Glimmlicht in evacuirten Röhren manche Aehnlichkeiten hat. Ein Versuch könnte leicht darüber entscheiden, wenn man z. B. auf eine Ebonitscheibe von 6 cm einen schmalen Carton- oder Stanniolring von 4 cm Durchmesser klebte. Würde dann ein ringförmiger Schatten entstehen, etwa so, wie der Ring ihn für sich allein gäbe, so müsste man annehmen, dass die Ebonitmasse wirklich für die Strahlung permeabel wäre. Man würde dann natürlich neben der Fortführung durch die Luft noch eine besondere im Aether sich fortpflanzende Strahlung annehmen müssen. Dass andererseits das Glimmlicht in der Luft und dasjenige in evacuirten Röhren auch ihre Unterschiede haben, zeigt sich u. a. in der starken Verzerrung, welche bei ersterem die Schattenbilder

W. Holtz, Götting. Akademieber., p. 545 u. 603. 1880; u. p. 80 u. 241. 1881. Dieselben sind auch in Carl's Repert. der Phys. vom Jahre 1881 abgedruckt.

leitender Körper erfahren, eine Folge der Influenzwirkung der Scheibe auf den interpolirten Körper, wodurch dieser, namentlich peripherisch, entgegengesetzt electrisch wird und somit gleichnamig electrisch mit den Strahlen, die hierdurch eine Abstossung erfahren, ein Effect, welcher in evacuirten Röhren wegen der voraussichtlich ungleich schnelleren Strahlung und der disruptiven Entladungsform, wie man sie hier meist anzuwenden pflegt, nicht zur Geltung gelangen kann. Ein anderer Unterschied ist, dass beim Glimmlicht in der Luft kein namhafter Unterschied der Erscheinungen bei positiver und negativer Strahlung resultirt. Diese und andere Unterschiede weiter zu verfolgen, dürfte nach der Röntgen'schen Entdeckung von grösserem Interesse sein und dies ist ein Grund mehr, weshalb ich hier diese Mittheilung mache, da ich selber Experimente anzustellen durch Krankheit wohl für längere Zeit behindert bin.

10. *Theorie des remanenten Magnetismus von Föppl; von P. Beck.*

Föppl folgert aus der von ihm aufgestellten Theorie des remanenten Magnetismus ¹⁾, dass harter Stahl gegen magnetische Wirkungen schirme und daher eine über einen stromführenden Leiter geschobene Stahlröhre die magnetischen Wirkungen des Stromes aufhebe oder doch vermindere, da die aus dem Leiter austretenden magnetischen Kraftlinien den Stahl nicht zu durchdringen vermögen. Die im Folgenden beschriebene experimentelle Prüfung dieser Angabe liefert zugleich das Kriterium für die theoretischen Vorstellungen, aus welchen dieselbe gefolgert ist.

Föppl hat den Versuch gemacht, die Erscheinungen des remanenten Magnetismus lediglich mit Hülfe der Kraftlinienlehre, ohne Benutzung der Begriffe der älteren Theorie darzustellen. Sind B, B_y, B_z die Componenten der magnetischen Induction nach den drei Coordinatenaxen, so gelten für ein magnetisch weiches, nicht von electrischen Strömen durchflossenes Medium die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right. \\ (2) \quad & \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Ist das Medium stromdurchflossen, so treten an Stelle der Gleichungen (1) die Gleichungen:

$$(1a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 4\pi\mu C_1 \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= 4\pi\mu C_2 \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= 4\pi\mu C_3, \end{aligned} \right.$$

1) Föppl, Wied. Ann. 48. p. 252. 1893.

in denen μ die magnetische Permeabilität und $C_1 C_2 C_3$ die Componenten der Stromstärke bedeuten.

Die Erfahrung lehrt nun, dass die Gleichungen (1) nicht für alle Körper gültig sind. An der Oberfläche eines Magneten z. B. kann die magnetische Kraft und daher auch die magnetische Induction nicht von einem Potential abgeleitet werden, auch wenn keine Ströme vorhanden sind. Föppl nimmt an, dass dies nicht nur von der Oberfläche, sondern von dem ganzen Innern des Magneten gilt und dass die Gleichungen (1) für den von einem magnetisch harten Körper eingenommenen Raum die Form annehmen:

$$(1b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial B_{...}}{\partial y} - \frac{\partial B_{..}}{\partial x} &= A_1 \\ \frac{\partial B_{.}}{\partial z} - \frac{\partial B_{...}}{\partial x} &= A_2 \\ \frac{\partial B_{..}}{\partial x} - \frac{\partial B_{.}}{\partial y} &= A_3. \end{aligned}$$

$A_1 A_2 A_3$ sind dabei die Componenten eines nicht näher bestimmten Vectors A .

Diese Gleichungen, deren Aehnlichkeit mit den Gleichungen (1a) die Möglichkeit der Theorie der Ampère'schen Molecularströme darthut, werden nun von Föppl folgendermaassen gedeutet. Die Gleichungen (1) und (2) stellen nicht nur den stationären Zustand des Magnetfeldes bei constantem Strom dar, sondern sind zugleich die Gesetze für die Fortpflanzung des Kraftflusses, wenn ein Strom geschlossen oder geöffnet wird. „Die zweite von diesen Gleichungen kann man als das Differentialgesetz der longitudinalen und die erste als das der transversalen Fortpflanzung des magnetischen Feldes bezeichnen. Nur daraus, dass diese Gleichungen erfüllt sein müssen, folgt die Fortpflanzung durch den ganzen Raum von einem Erregungscentrum aus.“¹⁾ Aus der Form der Gleichung (1b) folgt unmittelbar, dass die Fortpflanzung des Kraftflusses in magnetisch harten Medien eine wesentlich andere sein muss, als in magnetisch weichen, indem die ersteren dem Eindringen der Kraftlinien einen Widerstand entgegensetzen, welcher durch die Grösse des Vectors A gemessen

1) Föppl, Maxwell's Theorie der Electricität. p. 206.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. 57.

werden kann. „Während ein über den Draht geschobener, absolut weicher eiserner Hohlzylinder die sich aussen anschliessende Luft vor dem Kraftfluss nicht zu schützen vermag, kann dies ein magnetisch harter Körper thun. Von einem solchen ist in dem erwähnten Fall eine mehr oder weniger vollkommene Schirmwirkung zu erwarten, indem die durch die Gleichungen (1) ausgesprochene transversale Fortpflanzungsart der Kraftlinien in dem magnetisch harten Medium mehr oder weniger gehemmt ist.¹⁾

Zur experimentellen Prüfung dieser Theorie benutzte ich zwei völlig gleichartig gearbeitete Röhren aus Stahl und Eisen von 1 m Länge, 5 cm äusserem und 1 cm innerem Durchmesser, in deren Bohrung ein 6 mm dicker Kupferdraht in isolirender Hülle geschoben werden konnte. Floss durch diesen Draht ein Strom, so musste nach Föppl das Magnetfeld ein verschiedenes sein, wenn sich der Draht im Eisenrohr oder Stahlrohr befand. Die unmittelbare Messung der Feldstärke mit dem Magnetometer führte zu keinen genauen Ergebnissen, da die Anwesenheit der Stahl- bez. Eisenmasse sich zu stark geltend machte. Deshalb versuchte ich zu bestimmen, ob die Inductionswirkung des durch den Kupferdraht fliessenden Stromes auf einen ausserhalb des Stahlrohres befindlichen Leiter durch die Stahlmasse aufgehoben oder vermindert würde. Da die Stärke des Inductionsstromes beim Schliessen und Oeffnen des primären Stromes proportional der Zahl der in den secundären Leiterkreis ein- bez. austretenden Kraftlinien ist, so liess die besprochene Theorie eine derartige Wirkung erwarten.

Die Anordnung war folgende: Der primäre Strom durchfloss den in einer der Metallröhren befindlichen Kupferdraht. Seine Stärke konnte vermittelt eines eingeschalteten Widerstandskastens, seine Richtung durch einen Umschalter geändert werden. Bei den Versuchen wurden Ströme von $\frac{1}{10}$ bis 4 Ampère verwandt. Gemessen wurden die Inductionsströme, welche durch Richtungsänderung des Stromes hervorgerufen wurden. Der secundäre Leiter bestand aus einem dünnen Kupferdraht, welcher in 42 Windungen um ein rechteckiges

1) Wied. Ann. 48. p. 256. 1893.

Brett von 1 m Länge und 30 cm Breite gewunden war. Die Enden desselben führten zu einem Du Bois-Rubens'schen Galvanometer. Das mit dem Draht umwundene Brett wurde nun mit seiner Längsseite parallel dem primären Leiter in einer Entfernung von 3 cm gelegt und beide Leiter derart befestigt, dass über den als primären Leiter dienenden Kupferdraht die Eisen- oder Stahlröhre geschoben werden konnte, ohne dass sich die Entfernung oder gegenseitige Lage der Stromleiter änderte. Die Stärke des Inductionsstromes, der durch Umschalten des primären Stromes hervorgerufen wurde, wurde nach der ballistischen Methode gemessen. Folgende Tabelle enthält die Galvanometerausschläge für 12 verschiedene Stromstärken, wenn der Draht in dem Stahlrohr, in dem Eisenrohr oder in Luft sich befand. Die Zahlen in einer Horizontalreihe beziehen sich dabei auf dieselbe Stromstärke des primären Stromes. Jede Zahl ist das Mittel aus fünf Ablesungen.

In Luft	In Eisen	In Stahl
2,7	2,6	2,7
3,1	2,9	2,9
3,4	3,4	3,3
4,3	4,2	4,2
5,0	4,9	5,0
5,7	5,6	5,8
6,4	6,6	6,7
7,2	7,0	7,2
8,1	8,2	8,2
9,3	9,4	9,3
17	17	16,5

Von einer Schirmwirkung des Stahles kann offenbar nicht die Rede sein. Die vorhandenen Verschiedenheiten der Ausschläge bei gleicher Stärke des primären Stromes weisen keine Regelmässigkeit auf, und dürften der verschiedenen Geschwindigkeit beim Umschalten des primären Stromes zuzuschreiben sein, obwohl ich diesem Punkt bei den Beobachtungen besondere Sorgfalt zugewendet hatte.

Bei einer zweiten Versuchsreihe, die in analoger Weise, wie die vorige, durchgeführt wurde, befand sich der Leiter des inducirten Stromes in der Stahl- bez. Eisenhülle. Auch bei diesen Versuchen war von der nach der Theorie von Föppl zu erwartenden Schirmwirkung des Stahles nichts zu bemerken.

Leipzig, Physik. Instit. der Universität, Januar 1896.

**11. Apparat zur Beobachtung und Demonstration
kleiner Luftdruckschwankungen („Variometer“);
von F. v. Hefner-Alteneck.**

Der nachstehend beschriebene, sehr einfache und dauernd wirkende Apparat lässt das häufige Auftreten kleiner Luftdruckschwankungen, welche am Barometer nicht mehr wahrnehmbar sind, erkennen und beobachten. Seine Empfindlichkeit ist so gross, dass man ihn bloss in die Höhe zu heben braucht, um damit die Luftdruckabnahme schon innerhalb eines Decimeters nachzuweisen. Diejenige für 1 m kann man so vor einer grossen Personenzahl demonstrieren.

Die Luftdruckveränderungen werden durch Bewegung eines gefärbten Tropfens in einer Glasröhre angezeigt, aber nur dann, wenn sie einigermaassen schnell verlaufen. Es werden auf diese Art nur die kleinen, wellenartig auftretenden Schwankungen zur Darstellung gebracht, während die grossen, langsam verlaufenden, welche das Barometer angiebt, ausgeglichen sind.

Es ist dieses Verfahren ungefähr mit der Beobachtung von Wellenhöhen auf dem Meere vergleichbar, bei welcher gleichzeitig stattfindende Niveauveränderungen unberücksichtigt bleiben.

Wären auch die langsamen grossen Luftdruckschwankungen zur Erscheinung gebracht, dann müsste die Glasröhre viele Meter lang sein und der Tropfen würde sich durch Benetzung der Wände aufbrauchen. Gleichzeitig mit den grossen Schwankungen ist auch der schädliche Einfluss von Temperaturveränderungen ausgeglichen.

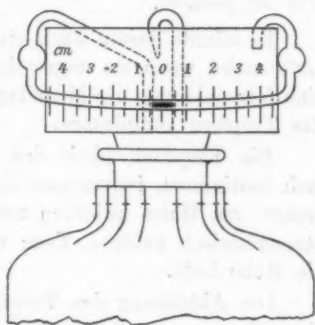
Umstehende Abbildung zeigt den oberen Theil des Apparates. Der untere besteht aus einer mit Filz oder Wollenzeug umhüllten Flasche von etwa 1 l Luftinhalt, welche durch einen Gummipfropfen mit zwei Durchbohrungen geschlossen ist. In die eine Durchbohrung ist die 2 bis höchstens 3 mm weite Glasröhre eingesteckt, welche den

gefärbten Tropfen enthält. Dieser spielt in einem waagerechten etwa 10 cm langen Stück der Röhre, welches jedoch annähernd in einem sehr flachen Kreisbogen ein wenig durchgebogen ist, sodass es in der Mitte etwa um 4 mm tiefer liegt wie aussen. Dahinter befindet sich eine kleine Centimeterscala. Zu beiden Seiten des Stückes ist die Röhre aufwärts gebogen und enthält kleine Kugeln oder Erweiterungen, nur damit beim Einstecken des Pfropfens etc. der Tropfen nicht herausgeworfen wird. Schliesslich sind die Enden der Röhre wieder abwärts gebogen, das nach aussen mündende, damit kein Staub hineinfällt. Für den Tropfen ist u. a. Petroleum, möglichst schwach mit Azobenzol gefärbt, gut verwendbar.

Die andere Durchbohrung enthält eine zweite Glasröhre, welche in einer sehr fein ausgezogenen (abwärts gebogenen) Spitze oder einem angeschmolzenen Stückchen eines Thermometerrohres ohne weiteres nach aussen mündet.

Durch diese feine Spitze oder Rohrmündung wird der fortwährende Ausgleich zwischen dem äusseren, jeweiligen mittleren Luftdruck und dem in der Flasche selbstthätig hergestellt. Es ist dabei gleichgültig, ob der Druckausgleich durch eine innerliche Temperaturveränderung oder im Zusammenhang mit einer Veränderung des Barometerstandes hervorgerufen wird, insofern beide nur sehr langsam vor sich gehen. Bei letzterem ist das ohnedem der Fall, für erstere wird es unter normalen Verhältnissen durch die Umhüllung der Flasche gewährleistet.

Bei diesem Ausgleiche fliesst der Tropfen aus abgelenkter Stellung dem tiefsten, mittleren Punkte der Röhre zu. Dies geht aber nur sehr langsam vor sich, weil die bewegende Kraft sehr klein ist und demgegenüber der Widerstand der durch die Spitze getriebenen, wenn auch nur sehr kleinen Luftmenge sich fühlbar macht.



Die häufigen, kleinen Luftdruckschwankungen dagegen verlaufen viel zu rasch, um eine nennenswerthe Luftmenge durch die feine Spitze schaffen zu können. Ihr Ausgleich findet so gut wie ausschliesslich durch die weite Röhre statt *und kommt darin durch Verschiebungen des Tropfens zum Ausdruck.*

Durch die erwähnte Eigenbewegung des Tropfens werden zwar seine Auswärtsbewegungen ein wenig verzögert, die anderen beschleunigt. Weil es sich aber dabei, wie gesagt, nur um sehr geringe Beträge handelt, so wird der Charakter der Schwankungen dadurch nicht verändert. Ueberdies tritt die Eigenbewegung des Tropfens der Krümmung der Röhre wegen bei kleinen Ausschlägen entsprechend schwächer auf wie bei grossen.

Es könnte darum auch eine *stetige* Bewegung des äusseren Luftdrucks, wenn sie ungewöhnlich rasch vor sich ginge, nur eine Verschiebung der Mittellage, nicht aber eine Fortbewegung des Tropfens veranlassen.

Die Empfindlichkeit des Apparates lässt sich sehr einfach bestimmen, indem man ihn, damit er seine Neigung nicht ändert, am Halse zwischen zwei Fingern fasst, und an einem atmosphärisch ruhigen Tage um ein abgemessenes Stück in die Höhe hebt.

Die Aklenkung des Tropfens wird dabei beobachtet, ehe sie sich langsam wieder zurückbildet.

Man wird finden, dass sie, je nach der benutzten Röhrenweite, den 150—300fachen Betrag von demjenigen aufweist, welchen das Quecksilberbarometer anzeigen würde (bei uns 0,09 mm auf den Meter).

Ueber bis jetzt mit dem „Variometer“ gemachte Beobachtungen sei angeführt, dass die kleinen Luftdruckschwankungen zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden stark auftreten. So waren sie z. B. in der ersten Hälfte des verflossenen December anhaltender und im allgemeinen stärker wie in der zweiten. Am stürmischen 6. December waren sie besonders Vormittags so heftig, dass sie den Tropfen beiderseitig über die Scala hinaustrieben. Es war dies der Tag, welcher für Berlin und Umgegend mit heftigen Gewittern und Schneefällen endete.

In einem bewohnten Hause treten zu den atmosphärischen Luftdruckschwankungen noch solche hinzu, die von bewegten Thüren etc., auch wenn das Beobachtungszimmer geschlossen bleibt, herrühren. Zumeist sind diese Schwankungen aber schon an ihrem Verlaufe als solche zu erkennen.

Schliesslich sei bemerkt, dass das Variometer bei Warmbrunn, Quilitz & Co., Berlin C., Rosenthalerstrasse 40 bezogen werden kann zum Preise von 3 M. 60 Pf.

12. *Ueber Beobachtungen von Windwogen; von M. Toepler.*

(Hierzu Taf. III Fig. 1–8.)

In den letzten Jahren ist die Aufmerksamkeit der Physiker und Meteorologen durch H. v. Helmholtz auf eine bisher wenig beachtete Klasse von Bewegungserscheinungen im Luftkreise hingelenkt worden, welche er mit dem Namen Luft- oder Windwogen bezeichnet.¹⁾

Wenn übereinander liegende verschieden schwere Luftschichten in horizontaler Richtung aneinander entlang gleiten, so entstehen an deren Grenzfläche Wellensysteme, welche im allgemeinen den durch Wind erregten Wellen an der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft durchaus ähnlich sind; jedoch können Luftwogen viel grössere räumliche Dimensionen annehmen.

Aus Helmholtz's theoretischen Betrachtungen geht hervor, dass ein und derselbe Wind interferirende Luftwogen verschiedener Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit erzeugen kann; überwiegend kommen Wogen grosser Wellenlänge zur Ausbildung; kleinere und kleinste Wellenlängen sind zwar möglich, werden aber selten sein; ihre Ausbildung setzt ziemlich scharfe Trennung der gleitenden Luftschichten voraus, wie sie z. B. vorkommt, wenn bei wärmerer westlicher Luftströmung kälterer östlicher Wind in den unteren Schichten der Atmosphäre einsetzt.

Helmholtz zweifelt nicht, dass derartige Windwogen, wenngleich sie sich meistens der Wahrnehmung entziehen, dennoch ausserordentlich häufig vorkommen und in der Energetik der Erdatmosphäre eine wichtige Rolle spielen. Starke Windwogen grösserer Wellenlänge, welche in der Höhe weniger Kilometer über der Erde hinziehen, sind zwar am sogenannten böigen Wetter erkennbar, aber nur dann, wenn die untere Schicht soweit mit Wasserdampf gesättigt ist, dass die Wellenberge,

1) H. v. Helmholtz, Berl. Akad.-Ber. 31. Mai 1888. p. 647 und 25. Juli 1889. p. 761, ausserdem 17. Juli 1890. p. 853 oder Wied. Ann. 41. p. 641. 1890.

in denen der Druck geringer ist, Nebel zu bilden anfangen, erkennt das Auge den Bewegungsprocess an dem Auftreten streifiger, paralleler Wolkenzüge, deren Breite bekanntlich sehr verschieden sein kann, von der zartesten Cirrusbildung bis zu dem häufig auftretenden Cumulostratus.

Die erste interessante Bestätigung des Vorkommens unsichtbarer Luftwogen im Sinne der Helmholtz'schen Theorie haben bekanntlich neuerdings die wissenschaftlichen Ballonfahrten ergeben, welche vom Münchener Vereine für Luftschiffahrt veranstaltet wurden.¹⁾ Dieselben haben nicht nur festgestellt, dass an der Grenze von wellenförmigen Wolkensichten schroffe Uebergänge zwischen übereinander gelagerten, verschieden gerichteten Luftströmen ungleicher Temperatur vorkommen, sondern es sind auch starke Luftwogen kurzer Schwingungsperiode in der Nähe des Erdbodens direct beobachtet worden. Ein Ballon, welcher mit constanter Belastung in geringer Höhe mit ziemlich starkem oberen Winde dahinschwabte, hob und senkte sich periodisch 10mal während 15 Minuten von 20 auf 60 m Höhe und umgekehrt, vollführte also verticale Schwingungen mit 40 m Amplitude.

Aus den bei der letztgenannten Ballonfahrt beobachteten Temperaturdifferenzen der übereinander gleitenden Luftschichten lässt sich nun leicht berechnen, dass die den vorüberziehenden Wogen entsprechenden periodischen Druckänderungen an der Erdoberfläche nach Zehntausenteln des Atmosphärendruckes zu veranschlagen, also durch hinreichend feine Druckmesser deutlich sichtbar zu machen sind. Freilich eignet sich hierzu nicht die träge Säule des Quecksilberbarometers mit ihren bekannten Fehlerquellen, welche hauptsächlich von der veränderlichen Meniskengestalt beim Auf- und Abwärtssteigen herrühren.²⁾ Wohl aber war zu erwarten, dass der äusserst bewegliche Xylolfaden der von meinem Vater angegebenen Drucklibelle³⁾ ein geeignetes Hilfsmittel sein werde. Ein Apparat, welcher ohne Zweifel geeignet ist, Luftwogen in

1) Finsterwalder u. Sohnke, Meteorol. Ztschr. October 1894. p. 375. und 376.

2) J. Pernet, Ztschr. f. Instrumentenkunde. Nov. 1886.

3) A. Toepler, Wied. Ann. 56. p. 609. 1895 u. 57. p. 324. 1896. Vgl. auch M. Toepler, Wied. Ann. 57. p. 311. 1896.

vollkommener Weise zu beobachten, ist übrigens schon vor mehr als 20 Jahren von Hrn. F. Kohlrausch construirt und beschrieben worden¹⁾; die Meteorologie scheint sich bisher dieses einfachen Hilfsmittels noch nicht bedient zu haben.

Benutzt man die Verschiebung des Flüssigkeitsfadens der Drucklibelle zum Ausgleich des Schwerdruckes zweier ungleichartiger Gassäulen (z. B. Luft und Kohlensäure) in der Weise, wie es in meiner eben citirten Abhandlungen (über Gasdichtebestimmungen) beschrieben ist, so zeigt Gleichung (1) daselbst, dass eine Aenderung δb des Barometerstandes unter sonst gleichbleibenden Umständen eine Ausschlagsänderung δl an der feststehenden Libelle erzeugt, welcher mit

$$\delta l = \frac{H(s - s_0)}{2 \sin \alpha \cdot \sigma_1 (1 + \alpha t) b_0} \delta b$$

auszudrücken ist. Die Buchstaben haben die am genannten Orte angegebene Bedeutung. Man sieht, dass der benutzte Gasdichteapparat zugleich als Luftdruckvariometer dienen könnte, jedoch müsste man, um für gegebene δb möglichst grosse Ausschläge δl zu erhalten, entweder sehr flache Libellenrohre (sehr kleines α) oder sehr hohe Gasdrucksäulen H anwenden.

Bei den früher mitgetheilten Beobachtungen zur Temperatur- und Gasdichtenmessung sind stets so grosse Libellenknickungen und so kleine Gasdruckhöhen benutzt, dass — vollkommen symmetrische Anordnung der Rohrsysteme vorausgesetzt — erhebliche Störungen des Libellenstandes durch rasche Barometervariationen ausgeschlossen sind. Als ich jedoch mit einem sehr unsymmetrischen Apparate der ange deuteten Art beobachtete, zeigten sich so grosse Ausschläge, dass die Gründe hierzu in einer anderen Wirkungsweise rascher Luftdruckänderungen, als der oben angegebenen aerostatischen beruhen mussten. Diese Wahrnehmung führte zur Construction der folgenden einfachen Vorrichtung, bei welcher ich den Zweck im Auge hatte, die bei windigem Wetter auftretenden raschen Druckvariationen, wenn auch nicht genau zu messen, so doch nach ihrem periodischen oder nicht periodischen Charakter zu unterscheiden.

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 150. p. 423. 1873.

Vorrichtung zur Beobachtung kurzdauernder Luftdruckschwankungen.¹⁾

In dem 3—4 mm weiten geknickten Libellenrohre AB (Knickungswinkel 3—5°) der schematischen Aufrissfigur (vgl. Figur) befindet sich der 2—5 cm lange Xylolfaden, dessen eine Kuppe durch ein Mikroskop M mit Ocularscala beobachtet wird. Um wesentliche und rasche Temperaturschwankungen während der Beobachtungen zu verhindern, liegt die Libelle wieder in einem Wasserbade (W). Die Xylolverdunstung kann auch hier, wenn nöthig, durch kleine rechts und links zunächst an AB angesetzte Kugeln mit ein paar Tropfen Xylol verhindert werden. Ueber Einzelheiten der Construction der Drucklibelle muss ich auf die oben erwähnten Abhandlungen über Temperatur- und Gasdichtenbestimmungen zurückweisen.

An B ist ein *weites* Rohr C horizontal angesetzt, an dieses eine sehr enge, lange horizontale Kapillare C' , welche bei f_2



frei endigt. Zur Vermeidung localer Störungen ist es nöthig, durch Biegung von C oder C' in der Horizontalebene das Ende f_2 dicht neben das andere freie Ende f_1 zu legen. (C' hatte bei den angestellten Versuchen 43 cm Länge und nur 0,00379 qcm lichten Querschnitt.) Die Rohrstücke $f_1 A$, C und C' müssen genau in derselben Horizontalebene liegen; C muss, um rasche Temperaturänderungen zu verhindern, sorgfältig in Baumwolle gepackt werden.

Denken wir uns, das Rohr C führe *nicht* durch C' bei f_2 ins Freie, sondern sei *abgeschlossen*. Herrscht in C und im Aussenraume der mittlere Luftdruck b , so möge der Xylolfaden in seiner symmetrischen Ruhelage einspielen. Luftdruckänderungen δb aussen werden nur durch Verschiebung des Xylolfadens (wobei der hydrostatische Druck $\delta h \cdot \sigma_1$ entsteht)

1) Einige Aehnlichkeit mit dem hier beschriebenen Apparate besitzt das zu Höhenmessungen vorgeschlagene „einfache und billige Barometer“ von P. Grützner. Vgl. Beibl. 19. p. 744. 1895.

auf das Luftvolumen v in C wirken können, und den Druck daselbst um δp erhöhen. Es gilt dann

$$\delta b = \delta h \cdot \sigma_1 + \delta p.$$

Bedeutet δl die Kuppenverschiebung längs der Libellenröhre und 2α den nur kleinen ($3-5^\circ$) Knickungswinkel der Libelle, so kann man setzen $\delta h = 2\alpha \cdot \delta l$.

Raschen Aenderungen von b entsprechen rasche Zustandsänderungen in C , die man in erster Annäherung als adiabatisch ansehen kann, wenn C wie oben angegeben in Baumwolle sorgfältig gepackt ist. Dann ist $p \cdot v^k = \text{const.}$, wobei bekanntlich $k = 1,41$ zu setzen ist.

Berücksichtigt man schliesslich, dass $\delta v = -q \cdot \delta l$ ist, wo q den Querschnitt des Libellenrohres bedeutet, so folgt endlich

$$\delta b = \delta l \left[2\alpha \sigma_1 + k \cdot q \cdot \frac{b}{v} \right].$$

Alle Klammergrössen, ausser dem auch als bekannt angenommenen mittleren Barometerstande b sind der Versuchsanordnung individuelle feste Grössen; das beobachtete δl lässt also δb berechnen. Hierbei wird man bei kleinem α das erste Glied neben dem zweiten meist vernachlässigen können.

Bei den angestellten Versuchen war beispielsweise:

b etwa 1020 g (75 cm Quecksilberdruck im Mittel),

$q = 0,080$ qcm,

$v = 11,56$ ccm,

$2\alpha \sigma_1 = 0,0624$ g,

$k = 1,41$.

Daraus berechnet sich

$$\delta b = \delta l [0,0624 + 10,2].$$

Unter den unten angegebenen Beschränkungen entsprach also einer Druckzunahme von 1 g auf den Quadratcentimeter ein Ausschlag von $\frac{1}{10}$ cm, oder einer Luftdruckänderung von 1 mm Quecksilberdruck ein Ausschlag von etwa 1,4 mm. Da weiter im Mikroskope auf ein Millimeter 60 Theilstriche kamen, so würde eine Kuppenstandsänderung von einem Theilstriche eine Luftdruckänderung von etwa $\frac{1}{80}$ mm Quecksilberdruck anzeigen.

Zu bemerken ist noch, dass für kurze Xylolfäden (bis 5 cm) der Einfluss einer geringen Inconstanz der Fadentemperatur (soweit sie durch das Wasserbad nicht zu vermeiden ist) auf den Kuppenstand verschwindend klein ist.

Der oben der Rechnung zu Grunde gelegte ideale Grenzfall ist nun bei dem beschriebenen Apparate nur mit einer gewissen Annäherung verwirklicht. Ich verzichtete auf genaue Absolutmessungen, welche bei subjectiver Beobachtung rascher Prozesse doch nicht möglich gewesen wären, hauptsächlich um den Störungen durch Temperaturvariationen zu entgehen. Offenbar würden nämlich bei abgeschlossenem C kleine Temperaturänderungen dortselbst viel grössere Ausschläge veranlassen können als die zu beobachtenden. Daher wurde an C die offen endigende Capillare C' angesetzt. Die Spannungsänderungen des in C befindlichen Luftpörpers nicht nur infolge der Temperatur- sondern auch infolge *langsamer* Barometeränderungen werden hierdurch ausgeglichen¹⁾, sodass nur rasch verlaufende Luftdruckvariationen von Einfluss bleiben; für diese gilt dann, freilich nicht ganz genau, die oben angegebene Bedeutung der Ausschläge. Ohne die Capillare würde bei langen Beobachtungsreihen die Fadenkuppe nicht im Sehfelde zu halten gewesen sein.

Bei Beurtheilung des Apparates ist natürlich noch zu beachten, dass durch sehr rasche Luftdruckänderungen (stark gedämpfte) Eigenschwingungen des aus dem als abgesperrt anzusehenden elastischen Luftquantum in C und dem abschliessenden Xylolfaden gebildeten Systems entstehen können. Sowohl durch Rechnung aus den oben angegebenen Dimensionen des Apparates, als auch experimentell findet man, dass

1) Die angesetzte Capillare muss den Absolutwerth der beobachteten Ausschläge offenbar um so mehr beeinflussen, je weiter und je kürzer dieselbe ist; es wird über die je nach Umständen günstigsten Dimensionen im einzelnen Falle zu verfügen sein. Bei den Beobachtungen der Diagramme 5, 6 und 7 waren die Verhältnisse so gewählt, dass eine absichtlich (bei ganz windstillem Wetter) herbeigeführte Spannungsdifferenz zwischen C und dem Aussenraume sich in folgender Weise langsam ausglich:

Zeit in Sec.: 0	4	8	12	16	20	30	40,
Theilstriche: —	34	28	23,5	19,5	16	10	4.

Hiernach könnten, wenn nöthig, die Ordinaten corrigirt werden.

die Dauer solcher Schwingungen nur kleine *Bruchtheile einer Secunde* betragen; störend wurde sie erst, als versuchsweise das Volumen v sehr gross (ca. 180 ccm) gewählt wurde. Mit der durch erhebliche Vergrösserung von v gesteigerten Empfindlichkeit wuchs natürlich auch der Einfluss localer Störungen. War schon bei dem kleineren Apparate ($v = 11$ ccm) jedes rasche Oeffnen und Schliessen selbst bis zu 30 m entfernter Thüren auch durch andere verschlossene Thüren hindurch störend, so galt dies umsomehr für $v = 180$ ccm; hier gab schon jedes Gehen durch *offene* Thüren der Nachbarschaft einen Ausschlag; ja sogar die Luftdruckänderungen, veranlasst durch Gehen in einem Zimmer über dem Beobachtungsraume, gaben Ausschläge in dem auf einem erschütterungsfreien Isolirpfeiler aufgestellten Apparate. Es dürfte daher zweckmässig sein, v nie wesentlich grösser als 100 ccm zu wählen.

Die Beobachtungen in freier vom Winde bewegter Luft anzustellen, würde fehlerhaft gewesen sein, da alsdann die offenen Rohrenden den *von der Richtung abhängigen* Stosswirkungen der vorüberziehenden Luftströme ausgesetzt worden wären. Der Apparat wurde daher in einem Laboratoriumszimmer (von 10 m im Geviert Grundfläche und etwa 5 m Höhe) aufgestellt, welches mit der freien Umgebung (von zwei geschlossenen Thüren abgesehen) vermittels der Undichtigkeiten von acht grossen Fenstern und durch weite, bei den Versuchen offene Ventilationskanäle in Communication stand; letztere mündeten theils im Dachraume des Gebäudes, theils im Hofraume. Die Fensterfronten führten nach Norden und Süden, einerseits auf einen Hofraum, andererseits auf einen freien grossen Platz, sodass für Druckausgleich gesorgt war. Freilich kann nicht behauptet werden, dass die Beobachtungswerthe irgendwie scharf den Verlauf des Aussendruckes wiedergeben. Sicher aber sind die beobachteten Periodicitäten nicht durch Luftoscillationen in den beteiligten Gebäuderäumen nach Art stehender akustischer Schwingungen entstanden. Selbst der benachbarte grosse Hofraum (etwa wie eine kubische Pfeife erregt gedacht) würde einer viel zu kurzen Zeitperiode entsprechen, um die beobachteten Erscheinungen zu erklären. Ich kann daher den periodischen Charakter der letzteren nur den barometrischen Variationen zuschreiben, wie sie den Helm-

holtz'schen Wogen entsprechen würden. Ein directer und wohl unanfechtbarer Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme ist durch die Verschiedenheit der beobachteten Zeitperioden, als auch des Charakters der Einzelheiten in den Erscheinungen gegeben. Diese Verschiedenheiten sind, wie ein Blick auf die Diagramme zeigt, je nach den meteorologischen Verhältnissen sehr gross, obwohl stets unter sonst thunlichst gleichen Umständen beobachtet wurde. Ein zweiter Beweis für die Richtigkeit meiner Annahme liegt in der Thatsache, dass Periodicitäten unter den zahlreich beobachteten Druckvariationen nicht die *Regel* sondern die *Ausnahme* bildeten. Obgleich nämlich nur an solchen Tagen beobachtet wurde, an denen ich Luftwogen erwarten konnte, sind doch die mitgetheilten Diagramme die einzigen, welche unzweifelhaft periodische Schwankungen zeigen. Berücksichtigt man, dass an 14 verschiedenen Tagen unter günstigen Bedingungen insgesamt während etwa 420 Min. Diagramme registrirt wurden, die mitgetheilten regelmässigen Diagramme aber nur etwa 50 Min. umfassen, so gewinnt man hieraus einen Anhalt zur Beurtheilung der Häufigkeit bez. Seltenheit des Auftretens Helmholtz'scher Luftwogen in den *unteren* Luftschichten. Undenkbar wäre es übrigens nicht, dass die geschlossenen Häuserreihen grosser Städte durch ihren hemmenden Einfluss die Gleitbewegung darüber hinfließender Luftschichten und somit die Ausbildung der Wogen begünstigen.

Die Diagramme.

Die Ablesungen folgten sich nach je $2\frac{2}{3}$ Sec. (genauer 23 Einzelablesungen in der Minute). Die *Zeiten* sind in den Diagrammen als *Abscissen* eingetragen; nach Ablauf je einer Minute ist in den Diagrammen ein Verticalstrich gezogen.

Auch hier zeigte sich, wie schon Hr. F. Kohlrausch l. c. bemerkt hat, dass bei Ablesungen in so grossen Intervallen nicht alle Details der wahren Luftdruckcurven mit registrirt werden. Da aber wesentlich rascher aufeinander folgende Beobachtungen als in den von mir eingehaltenen Zeitintervallen kaum möglich sein dürften, so wird es, abgesehen von anderen Vortheilen, für genauere Beobachtungen angebracht sein, eine selbstregistrirende Vorrichtung, etwa einen Spalt mit

vorbewegter photographischer Rolle in der Bildebene des Mikroskops, anzubringen.

Als *Ordinaten* sind die den Beobachtungszeiten zugehörigen *Kuppenstände* (in Theilstrichen gemessen, ein Theilstrich etwa gleich $\frac{1}{80}$ mm Quecksilberdruck) aufgetragen, und dann die einzelnen Ablesungswerthe geradlinig verbunden. — Hieraus erklärt sich das etwas eckige oder spitze Aussehen einzelner Diagramme; continuirliche Registrirungen würden meist viel glattere Curvenzüge ergeben haben. Zu dem Aussehen der Diagramme trägt auch der Umstand bei, dass zwar bei nicht allzubewegter Luft (wie in den Diagrammen I und II) Kuppenstandsänderungen von $\frac{1}{10}$ Theilstrich, d. h. von $\frac{1}{800}$ mm noch sicher abgelesen werden konnten, welchen eine Druckänderung von nur $\frac{1}{800}$ mm Quecksilberdruck entspricht; bei windigem Wetter aber sind die Luftdruckänderungen so rasche, dass ich mich meist mit Ablesungen ganzer oder höchstens halber Theilstriche begnügen musste. Abgesehen von kleineren Details geben die Diagramme trotzdem den allgemeinen Charakter der Druckschwankungen völlig hinreichend wieder. Machten locale Einflüsse eine oder mehrere Einzelablesungen unmöglich, so wurde nur die fortlaufende Zeit markirt.

Bei allen mitgetheilten Diagrammen entsprechen (infolge der Bildumdrehung im Mikroskope) *zunehmenden* Ordinaten *abnehmende* Luftdrucke. Der Maassstab aller Diagramme ist derselbe¹⁾, um Vergleiche zu erleichtern.

Ich lasse zunächst zur allgemeinen Orientirung eine Tabelle der Angaben der Dresdner meteorologischen Station über die Windverhältnisse²⁾ an den Tagen, an denen mitgetheilte Diagramme beobachtet wurden, folgen mit Bezeichnung der zugehörigen Diagramme.

1) Ohne Berücksichtigung der streng genommen erforderlichen nur unwesentlichen Correction auf gleichen mittleren Barometerstand.

2) Der Vorstand der Station, Prof. Neubert, hatte die Güte mir folgende den Windstärkeziffern zu Grunde liegenden Angaben zu machen: Grade nach Beaufort 0 = 0,25 m/sec; 1 = 1,0 m/sec; 2 = 2,5 m/sec; 3 = 5,0 m/sec; 4 = 7,0 m/sec; 5 = 9,5 m/sec.

Tag	Mittl. Barometerstand auf 0° red.	Richtung und Stärke des Windes					Figurennummer der zugehörigen Diagramme nebst Zeit des Beginnes der Ablesungen
		Morgens		Mittags		Abends	
17. Sept.	753,10	W	2	W	3	WNW	1 I 5 ^h 46 ^{min}
18. "	752,63	W	2	W	1	SSE	1 { II 10 ^h 23 ^{min} u. III 3 ^h 28 ^{min}
4. Oct.	740,13	WSW	1	WSW	4	W	2 IV 10 ^h 24 ^{min}
5. "	749,27	WNW	2	NW	4	W	1 V 8 ^h 51 ^{min}
6. "	748,07	SE	2	SW	3	WSW	1 VI 12 ^h 37 ^{min}
12. "	750,60	W	3	W	5	W	4 VII 11 ^h 5 ^{min}
16. "	746,13	ESE	1	W	3	NW	5 VIII 2 ^h 47 ^{min}

Alle abgelesenen Zahlenwerthe hier mitzutheilen erscheint überflüssig; nur für das besonders charakteristische Diagramm IV will ich dieselben angeben.

Die Ablesungen begannen am 4. October 10^h 24' min.

Es war: Luftfeuchtigkeit 67 Proc.

Barometerstand (auf 0° red.) 739,1 mm.

Charakteristische Minima sind fett gedruckt!

10 Uhr	24	25	26	27	28	29	30	31
	10	13,5	7	8	11	4	9	9
	12	14	14	12	12	10	10	11
	10	13	13	11	9	11	8	12
	12	10	9	11	7	8	8	12
	13,5	10	13	11	5	9	5	11
	14	10	14	9	4	7	6	8
	12,5	10	11	10	6	8	10	8
	9,3	9	11	11	13	10	12	8
	12	5	9	11,5	11	13	11	7,5
	15	10	9	8	12	12	10	7,4
	9	2	9	9	14	11	8	7
	8,2	12	10	9	8	11	8	6,5
	11	16	11,5	10	10	12	8	6,8
	12	19	—	11	9	10	7,5	7
	11,5	12	10	10	10	5	7	7,7
	12	10	10	9	10	8	7,8	7
	8	11	9	9	12	11	8	7,8
	7,5	11	6	10,8	8	11	9	10
	18	12	10	11,9	9	11,5	8	10
	14	11	9	10	10	11	6	8
	15	11	9	8	14	8	9	8
	12	12	11	11	8	9	11	7
	13	10	11	12	2	8	10	—
10 Uhr	25	26	27	28	29	30	31	32

Zu den Diagrammen ist im einzelnen nur noch wenig zu sagen; es genügt auf die folgenden Thatsachen hinzuweisen.

Diagramm II ist *unregelmässig* bei geringer Windstärke; es zeigt (ebenso wie auch schon die von Hrn. F. Kohlrausch l. c. mitgetheilten Diagramme) den *vorherrschenden Typus* der Luftdruckschwankungen.

Nur ab und zu traten *regelmässige periodische* Luftdruckschwankungen auf, wie z. B. die oben mitgetheilten Zahlen des Diagrammes IV erkennen lassen. Die Dauer und der Charakter der periodischen Erscheinungen selbst ist sehr verschieden. So beträgt die Periodendauer

in Diagramm I etwa 24 Sec.

IV	„	41	„
V	„	293	„
VII	„	107	„
VIII	„	60	„

(Ausserdem zeigte sich, wenn auch weniger deutlich am 10. October 12 Uhr eine Periode von 100 Sec. und an demselben Tage später eine solche von 80 Sec.; beide bei sehr kleinen Amplituden, d. h. bei wenig bewegter Luft.)

In den Diagrammen sind die charakteristischen entsprechenden Punkte der Periode, wo es nöthig erschien, durch darunter (bez. darüber gesetzte) Kreise markirt (zum Theil zeigen die Druckminima, zum Theil die Druckmaxima die Perioden besonders deutlich).

Freilich sind die auftretenden Regelmässigkeiten nie bis ins einzelne genau; dies ist aber auch weder bei Wasserwogen, noch auch bei den Cirrhen der Fall; eine grössere Regelmässigkeit der Windwogen als die thatsächlich beobachtete war also gar nicht zu erwarten.

Das Diagramm V erinnert, besonders in seinem ersten Theile, an die akustischen Schwebungen (und Combinationstöne); dass den Schwebungen analoge Erscheinungen auch bei Windwogen zu erwarten sind, hat schon v. Helmholtz¹⁾ hervorgehoben. Hieraus erklärt sich auch die auffallend lange Dauer der Periode in Diagramm V. Auch Diagramm VI zeigt

1) H. v. Helmholtz, Berl. Akad.-Ber. 25. Juli 1889, p. 780.

den Charakter einer Schwebung sehr gut, was um so bemerkenswerther ist, als sowohl während 10 vorangehenden als auch 20 folgenden Minuten, welche die Gesamtregistrierung umfasst, *keine* Regelmässigkeit zu erkennen war, im Gegentheile diese nicht mitgetheilten Abschnitte als Muster von Unregelmässigkeit gelten könnten.

Manchmal hat es auch ganz den Anschein, als ob Wellenzüge von sehr *verschiedener* Periodendauer sich superponirten; so vielleicht in dem das Ende einer längeren unregelmässigen Ablesungsreihe bildenden, besonders regelmässigen Diagramme III. In Diagramm VII ist ausser einer durch Kreise markirten Periode (von 107 sec) anscheinend noch eine zweite etwas längere (von 130 sec) enthalten, diese ist mit Kreuzchen markirt; man sieht sehr auffällig, wie in der That an der Stelle, wo diese zweite Woge die erste einholt, besonders grosse Amplituden entstehen (das Diagramm repräsentirt also gewissermaassen ein Stück einer sehr lang dauernden Art von Schwebung zwischen zwei Wellen mit scharf hervortretenden Kämmen), von hier ab war freilich der noch durch 13 weitere Minuten beobachtete Verlauf der Luftdruckschwankungen recht unregelmässig, und ist derselbe daher nicht mitgetheilt worden. Vielleicht treten derartige Erscheinungen auch auf, wenn sich, wie man oft bei Cirris zu beobachten Gelegenheit hat, zwei Wellenzüge kreuzen.

Das Diagramm VIII ist neben seiner grossen Regelmässigkeit durch seine Dimensionen bemerkenswerth; es zeigt, dass auch beim Abklingen sehr heftiger Windstösse¹⁾ regelmässige Erscheinungen auftreten können; der weitere nicht mitgetheilte Verlauf des Diagramms, beobachtet während der folgenden 12 Minuten, ist vollständig unregelmässig.

Nach Allem scheint es also unzweifelhaft, dass es sich bei den angestellten Versuchen um nichts anderes, als um die Wahrnehmung Helmholtz'scher Luftwogen handelt. Erst

1) „Der mit Regen verbundene Sturm, welcher sich seit dem Vormittage (des 16.) immer heftiger entwickelte, steigerte sich Nachmittags 3 Uhr ganz plötzlich zum Orkan“, welcher in Dresden mancherlei Verwüstung anrichtete, z. B. Aeste und Telegraphenstangen brach. Vgl. Dresdner Anz. vom 17. Oct. 1895. p. 4.

durch correspondirende Beobachtungen auf benachbarten Stationen in geeignetem Terrain wird über Fortpflanzungsgeschwindigkeit u. a. m. Aufschluss erhalten werden. Nach Beobachtungen der letzteren Art wird sich auch endgültig darüber entscheiden lassen, was in den Erscheinungen allenfalls den örtlichen Einflüssen zuzuschreiben ist.

Dresden, 13. Jan. 1896.

13. Ueber einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie; von E. Zermelo.

Im zweiten Kapitel der Poincaré'schen Preisschrift über das Dreikörperproblem¹⁾ findet sich ein Satz bewiesen, aus welchem hervorgeht, dass die verbreiteten Vorstellungen von der Wärmebewegung der Moleküle, wie sie z. B. der kinetischen Gastheorie zu Grunde liegen, einer wesentlichen Abänderung bedürften, um mit dem thermodynamischen Hauptsatze von der Vermehrung der Entropie vereinbar zu werden. Dieses Poincaré'sche Theorem sagt aus, dass in einem System von materiellen Punkten unter Einwirkung von Kräften, die allein von der Lage im Raume abhängen, im allgemeinen ein einmal angenommener durch Configuration und Geschwindigkeiten charakterisirter Bewegungszustand im Laufe der Zeit, wenn auch nicht genau, so doch mit beliebiger Annäherung noch einmal, ja beliebig oft wiederkehren muss, vorausgesetzt, dass die Coordinaten, sowie die Geschwindigkeiten nicht ins Unendliche wachsen. In einem solchen System sind daher, von singulären Anfangszuständen abgesehen, irreversible Vorgänge unmöglich, es kann keine eindeutige und stetige Function der Zustandsgrößen wie die Entropie fortwährend zunehmen, da jeder endlichen Zunahme bei der Rückkehr in den Anfangszustand wieder eine Abnahme entsprechen müsste. Hr. Poincaré bedient sich in der genannten Abhandlung seines Satzes zu astronomischen Erörterungen über die Stabilität des Sonnensystemes, er scheint aber seine Anwendbarkeit auf Systeme von Molekülen oder Atomen und damit auf die mechanische Wärmetheorie nicht bemerkt zu haben, wiewohl er gerade den Grundfragen der Thermodynamik besonderes Interesse zugewandt und auf einem anderen Wege den Nachweis versucht hat, dass die irreversiblen Vorgänge aus der v. Helmholtz'schen Theorie der „monocyclischen Systeme“ nicht immer

1) Poincaré, „Sur les équations de la dynamique et le problème des trois corps“, Acta Mathematica 13. p. 1–270. 1890; der betreffende Satz p. 67–72.

erklärt werden können.¹⁾ Um nun das Studium der umfangreichen und vielen Physikern schwerer zugänglichen Poincaré'schen Arbeit nicht voraussetzen zu müssen, schicke ich einen möglichst einfachen Beweis des angeführten Satzes voraus.

Sei N die Anzahl der materiellen Punkte und werden die $n = 6N$ Zustandsgrößen, d. h. die $3N$ Coordinaten und $3N$ Geschwindigkeitscomponenten mit x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnet, so sind die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der ersteren identisch mit den entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten, die Ableitungen der letzteren aber, d. h. die Beschleunigungscomponenten, die Kräfte, nach unserer Annahme eindeutige und stetige Functionen der Coordinaten. Jene sind also von den Coordinaten, diese von den Geschwindigkeiten unabhängig, und die Differentialgleichungen der Bewegung sind von der Form

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_\mu}{dt} = X_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (\mu = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

wo keine der Functionen X_μ die entsprechende Variable x_μ selbst enthält, sodass die Beziehung besteht:

$$(2) \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0.$$

In einem solchen Systeme (1) von Differentialgleichungen erster Ordnung entspricht einem beliebigen Anfangszustand P_0 :

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 \dots x_n = \xi_n, \quad (t = t_0)$$

ein bestimmter veränderter Zustand P zur Zeit t , ausgedrückt durch die Integralgleichungen von (1):

$$(3) \quad \begin{cases} x_\mu = \varphi_\mu(t - t_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ (\mu = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

wo die φ_μ eindeutige und stetige Functionen ihrer sämtlichen Argumente sind, die, unabhängig von der Wahl des Zeitanfanges t_0 , durch die Functionen X_μ allein bestimmt werden. Diese Beziehungen gelten eben so gut für vorhergehende wie für nachfolgende Zeiten, d. h. eben so gut für

1) Poincaré, Compt. rend. 108. p. 550—552. 1889; „Vorles. über Thermodynamik“, p. 294—296.

negative wie für positive Werthe von $t - t_0$; der Anfangszustand P_0 ist eine beliebige, willkürlich hervorgehobene Phase der Bewegung, die nicht immer zeitlich voranzugehen braucht. Ebenso entspricht auch einem stetig ausgedehnten Gebiet g_0 von Anfangszuständen, ausdrückbar durch Beziehungen der Form:

$$F(\xi_1, \dots, \xi_n) < 0,$$

ein bestimmtes verändertes Gebiet $g = g_t$ zur Zeit t und somit auch dem über g_0 erstreckten n -fachen Integrale

$$\gamma_0 = \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n,$$

das wir als die „Ausdehnung“ von g_0 bezeichnen wollen, im allgemeinen eine andere Ausdehnung von g

$$\gamma = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

In dem besonderen Falle aber, wo die Functionen X_μ der Bedingung (2) genügen, ist nach dem Satz von Liouville¹⁾ das zweite Integral gleich dem ersten und damit von der Zeit unabhängig, wie auch das Gebiet g_0 oder g , deren jedes durch das andere bestimmt ist, gewählt sein möge, sodass man abgekürzt schreiben kann:

$$(4) \quad d\gamma = dx_1 dx_2 \dots dx_n = d\gamma_0 = \text{const.}$$

„Die Folgezustände, die den Anfangszuständen eines beliebigen Gebietes entsprechen, erfüllen in jedem Augenblick Gebiete von der gleichen Ausdehnung.“

Ein beliebiges Gebiet g_0 von Zuständen geht also mit der Zeit stetig in immer neue Gebiete $g = g_t$, die „Phasen“ seiner Veränderung, über, welche sämmtlich die gleiche Ausdehnung γ besitzen. Alle diese „späteren“ Phasen g_t ($t \geq 0$) bilden zusammen genommen wieder ein stetiges Gebiet G_0 , die „Zukunft“ von g_0 , d. h. den Inbegriff aller Zustände, welche *künftig irgend einmal* in endlicher Zeit aus solchen von g_0 hervorgehen. Dieses Gebiet $G = G_0$ wird ganz im endlichen liegen und eine endliche Ausdehnung $\Gamma \geq \gamma$ besitzen, wenn wir voraussetzen, dass die Grössen x_1, x_2, \dots, x_n für alle Anfangs-

1) Jacobi, Dynamik. p. 93; Kirchhoff, Theorie der Wärme. p. 142–144.

zustände von g_0 gewisse endliche Grenzen niemals überschreiten. Während sich nun das Gebiet g von g_0 ausgehend mit der Zeit verändert, zugleich mit allen seinen „späteren Phasen“, deren jede immer in die folgende übergeht, so ändert sich auch ihre Gesamtheit G wie jedes andere Gebiet und stellt dabei in jedem Augenblicke t die „Zukunft“ der entsprechenden Phase g_t dar. Nach der Definition der Zukunft erfolgt diese Veränderung in der Weise, dass immer nur frühere Zustände austreten, niemals neue eintreten können: jede Phase von G enthält alle späteren in sich, und die Ausdehnung Γ kann immer *nur abnehmen*. Da aber nach (4) diese Ausdehnung *constant* bleiben muss, so können die austretenden Zustände niemals Gebiete von endlicher Ausdehnung erfüllen, ihre Anzahl verschwindet gegen die der bleibenden, sodass wir sie als *singuläre* bezeichnen können. Nun ist g_0 in G_0 enthalten, also zum überwiegenden Theil auch in jeder folgenden Phase G_τ , der Zukunft von g_τ , für ein beliebig grosses Zeitintervall τ . Das bedeutet aber: es gibt immer Zustände innerhalb g_τ , die später einmal in Zustände von g_0 übergehen, und, ihnen rückwärts entsprechend, Zustände von g_0 , die auch nach Ablauf der Zeit τ irgend einmal wieder nach g_0 zurückkehren. Diese letzteren finden sich in allen noch so kleinen Theilen des Gebietes, von denen ja dasselbe wie von g_0 selbst gilt, und hängen stetig zusammen, da mit jedem einzelnen zurückkehrenden Zustand auch seine nächste Umgebung zurückkehren muss, d. h. sie erfüllen das *ganze* Gebiet g_0 mit Ausnahme singulärer Zustände von der Gesamtausdehnung 0. Schliesst man daher alle diese singulären Zustände aus, die zu *irgend welchen* endlichen Zeiten τ gehören, so verbleibt ein Restgebiet g' , das nun nicht mehr nothwendig stetig zu sein braucht, aber immer noch die überwiegende Mehrzahl der Zustände von g_0 umfasst. Diese Zustände von g' werden nun nach beliebiger Zeit immer noch einmal, also unendlich oft nach g_0 zurückkehren und damit ihren Anfangszuständen beliebig nahe kommen, wenn man g_0 genügend klein angenommen hat.

Damit ist der Satz von Poincaré in voller Ausdehnung bewiesen; für den vorliegenden Zweck genügt aber schon der Nachweis, dass die Zustände von g_0 im Allgemeinen wenigstens noch *einmal* nach g_0 zurückkehren. Schon hieraus folgt

unmittelbar, dass es keine eindeutige und stetige Function $S = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ des Zustandes geben kann, die für alle Anfangszustände eines noch so kleinen Gebietes beständig zunähme. Denn wäre S für einen Anfangszustand P_0 während der Zeit τ von einem Werthe $< R$ gewachsen auf einen anderen $> R$, so müsste das gleiche gelten von allen Zuständen einer gewissen Umgebung g von P_0 , und für die nach g zurückkehrenden Zustände dieses Gebietes müsste die Function nachher wieder abnehmen.

Dasselbe lässt sich aber auch sehr einfach direct beweisen. Würde die Function S für alle Anfangszustände von g beständig zunehmen, so würde sie es auch für alle Zustände des grösseren Gebietes G , der Zukunft von g , und wegen (4) müsste dann auch das über G erstreckte n -fache Integral

$$\int S dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

beständig zunehmen. Das ist aber unmöglich, weil sich das Integrationsgebiet G immer nur um singuläre Zustände ohne endliche Ausdehnung verändert, wobei der Werth des Integrales constant bleibt.

Sehr anschaulich wird Bedeutung und Beweis des entwickelten Satzes für den Fall $n = 3$, wenn man die Variablen x_1, x_2, x_3 als die Coordinaten eines materiellen Punktes im Raume auffasst. Dann bestimmen die Gleichungen (1) in Verbindung mit (2) oder mit (4) eine stationäre Strömung einer incompressiblen Flüssigkeit und zwar in einem geschlossenen Gefässe, wenn die Grössen x_μ nicht ins Unendliche wachsen sollen. Einem bestimmten „Zustand“ entspricht hier ein Punkt im Raum, einem in der Zeit veränderten Zustande ein in Bewegung begriffener materieller Punkt. Die von diesen Flüssigkeits-Punkten beschriebenen Bahnen, die „Stromlinien“, bilden in stetiger Zusammensetzung „Stromröhren“ oder „Stromfäden“, je nachdem sie von geschlossenen Curven oder von Flächenstücken ausgehen, und bleiben bei der stationären Bewegung immer unverändert. Nun lehrt die Anschauung, dass hier alle Stromfäden in sich selbst zurücklaufen müssen, weil die durchströmende Flüssigkeit weder die Röhren durchbrechen, noch sich im Inneren irgendwo ansammeln kann. Daraus folgt aber, dass jedes endliche Flüssigkeitstheilchen einem einmal ange-

nommenen Orte immer wieder so nahe kommen muss, als man will, wenn man nur die Flüssigkeitsfäden dünn genug annimmt und genügende Zeit zur Verfügung hat. Daneben gibt es freilich auch nicht zurückkehrende singuläre Stromlinien, z. B. solche, die sich umströmten eingeschlossenen festen Körpern oder Hohlräumen zwischen den nach den verschiedenen Seiten ausweichenden übrigen Stromlinien *asymptotisch nähern*; diese vermögen aber niemals Stromfäden von endlicher Dicke zu bilden. Sollte dagegen die Strömung ein *Geschwindigkeitspotential* beistzen, so müsste dasselbe in dem vollständig geschlossenen Gefässe nothwendig *mehrdeutig* sein, während von der Function S in unserer Betrachtung ausdrücklich *Eindeutigkeit* gefordert wurde. Auch in dem allgemeineren Falle $n > 3$ ist es bei der weitgehenden Analogie oft von heuristischem Werth, die gleiche Ausdrucksweise beizubehalten und die Gleichungen (1) und (2) oder (4) als die einer „stationären Strömung einer incompressiblen Flüssigkeit in einem Raume von n Dimensionen“ zu deuten.

Das Ergebniss unserer Betrachtung ist also das folgende:

In einem System beliebig vieler materieller Punkte, deren Beschleunigungen nur von ihrer Lage im Raum abhängen, gibt es keine „irreversiblen“ Vorgänge für alle Anfangszustände, die ein noch so kleines Gebiet von endlicher Ausdehnung erfüllen, falls sowohl die Coordinaten als die Geschwindigkeiten der Punkte endliche Grenzen niemals überschreiten.

Der Satz gilt aber auch allgemeiner, insbesondere für ein beliebiges mechanisches System mit den verallgemeinerten Coordinaten q_μ und ihren Bewegungsmomenten p_μ , dessen Bewegungsgleichungen sich in der Hamilton'schen Form schreiben lassen:

$$\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\mu}, \quad \frac{dq_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_\mu},$$

und das wir als ein „conservatives“ bezeichnen können, weil hier alle Kräfte ein Potential besitzen und daher die mechanische Energie erhalten bleibt. In einem solchen System nämlich ist offenbar immer

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{dp_\mu}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{dq_\mu}{dt} = 0,$$

und mit dem Analogon der Beziehung (2) müssen auch alle aus ihr fließenden Folgerungen ihre Gültigkeit behalten.

Nach der mechanischen Theorie in ihrer gewöhnlichen atomistischen Darstellung wäre nun die ganze Natur als ein System der betrachteten Art aufzufassen: alle Naturvorgänge sind nichts als Bewegungen der Atome oder Molecüle, die entweder selbst als ausdehnungslose Punkte oder als Aggregate solcher Punkte behandelt werden können und ausschliesslich „Centralkräften“, die ein Potential haben, und von den Geschwindigkeiten unabhängig sind, unterliegen. Eben diese Annahme sucht man in der „kinetischen Gastheorie“ durchzuführen, indem man die Molecüle eines „vollkommenen Gases“ als abstossende Centren, als elastische Kugeln oder mit Boltzmann als elastische feste Körper anderer Gestalt, jedenfalls aber als „conservative“ Systeme in dem angegebenen Sinne betrachtet, nur dass man sich hier bei der Wirkung zweier Molecüle aufeinander auf „Stosskräfte“ beschränkt, d. h. auf Abstossungen, die erst bei sehr grosser gegenseitiger Annäherung wirksam werden.

Unter diesen Voraussetzungen könnten also auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen „irreversible“ Vorgänge für allgemeinere Anfangszustände nur dadurch möglich werden, dass von einer gleichförmig fortschreitenden Bewegung des Gesamtschwerpunktes natürlich abgesehen, Molecüle sich ins Unendliche zerstreuen oder schliesslich unendlich grosse Geschwindigkeiten gewinnen. Ist aber das erstere durch die besondere Natur des Systems, das wir uns z. B. von einer festen Hülle umgeben denken können, ausgeschlossen, so ist es auch das letztere auf Grund des Principes von der Energie. Denn sonst müsste zur Erreichung einer unendlich grossen lebendigen Kraft erst eine unendlich grosse Arbeit geleistet werden, was nur bei unbegrenzter Annäherung zweier anziehenden Centren eintreten könnte, während wir doch nach unserer Erfahrung bei sehr grosser Annäherung schlechterdings keine anderen als abstossende Kräfte voraussetzen dürfen. Haben wir z. B. ein in ein festes Gefäss mit elastischen und für Wärme undurchdringlichen Wänden eingeschlossenes Gas, so gäbe es zwar im allgemeinen eine unendliche Mannigfaltigkeit von Anfangszuständen der Molecüle, für welche das Gas *bleibenden*

Zustandsänderungen, wie Reibung, Wärmeleitung oder Diffusion entgegenginge. Aber daneben gäbe es noch sehr viel mehr von vornherein ebenso mögliche Anfangszustände, wie man sie schon durch beliebig kleine Verrückungen eines Moleküls aus den früheren erhalten könnte, für welche anstatt solcher irreversiblen Prozesse alle Zustände sich mit beliebig kleinen Abänderungen in dem oben angegebenen Sinne *periodisch wiederholen*. Das müsste auch gelten, wenn etwa der auf unsere Sinne wirkende *physikalische* Zustand, z. B. die Temperatur, und mit ihm auch der Werth der Entropie, nicht durch den augenblicklichen *Bewegungszustand* definirt wäre, sondern erst durch eine endliche *Folge von Bewegungen*, die aber jedenfalls durch den anfänglichen Bewegungszustand *bestimmt* wäre und mit ihm immer wiederkehren müsste.

Um daher die allgemeine Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes festzuhalten, wäre man zu der Annahme genöthigt, dass trotz ihrer geringeren Anzahl gerade jene zu irreversiblen Vorgängen führenden Anfangszustände in der Natur einmal *verwirklicht* seien, während die anderen, mathematisch betrachtet, wahrscheinlicheren thatsächlich *nicht vorkämen*.

So unwiderleglich eine solche Annahme auch wäre, so wenig entspräche sie unserem Causalitätsbedürfniss und jedenfalls dem Geiste der mechanischen Naturbetrachtung selbst, der uns immer nöthigen wird, alle *denkbaren* mechanischen Anfangszustände, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen auch als physikalisch *möglich* vorauszusetzen, zumal solche, die eine überwiegende Mehrheit ausmachen und von wirklich vorkommenden nur beliebig wenig abweichen. Beziehen sich doch, streng genommen, alle unsere Naturgesetze nicht auf *bestimmte* Grössen oder Vorgänge, die sich genau ja niemals beobachten lassen, sondern immer nur auf gewisse Spielräume, Annäherungen und Wahrscheinlichkeiten, während Singularitäten ausschliesslich als Grenzfälle in der Abstraction existiren. Die hier erörterte Annahme stände also einzig da in der Physik, und ich glaube daher nicht, dass sie irgend jemand würde dauernd befriedigen können.

Dass *nicht alle denkbaren* Anfangszustände dem zweiten Hauptsatz entsprechen können, geht schon daraus hervor,

dass bei einer *Umkehrung der Geschwindigkeitsrichtungen* aller Moleculë zu einem beliebigen Zeitpunkt sich auch der ganze zeitliche Verlauf eines Vorganges *umkehren* müsste. In der That ist auch dieses Bedenken schon längst gegen die mechanische Ableitung irreversibler Processe geltend gemacht worden und hat noch im Winter 1894/95, angeregt durch eine Aeusserung Culverwell's, zu einer ausgedehnten Discussion dieser Fragen in der „*Nature*“ Veranlassung gegeben, ohne indess, wie mir scheint, zu einer befriedigenden Lösung geführt zu haben. Es liess sich eben nicht beweisen, dass der physikalische Zustand eines Gases, auf den es allein ankommt, für gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeiten aller Moleculë immer derselbe sein müsse, in welchem Falle allein hier von einer wirklichen Umkehrung des Vorganges gesprochen werden dürfte, und es blieb ferner noch die Möglichkeit offen, dass wenigstens für ein ausgedehntes *Gebiet* von Anfangszuständen beständige Vermehrung der Entropie stattfinden könne. Beides sind Einwände gegen die angegebene Argumentation, die erst durch die Anwendung des Poincaré'schen Satzes beseitigt werden.

Nach alledem bestände also die Nothwendigkeit, entweder dem Carnot-Clausius'schen Princip oder aber der mechanischen Grundansicht eine principiell andere Fassung zu geben, sofern man sich immer noch nicht entschliessen kann, die letztere überhaupt endlich aufzugeben. Geringere Abänderungen würden hier, wie mir scheint, kaum zum Ziele führen. Wollte man beispielsweise versuchen, die zwischen den Moleculen oder Atomen wirkenden Kräfte statt allein von ihrer gegenseitigen Lage auch von ihren Geschwindigkeiten abhängig zu machen, womit allerdings die Anwendbarkeit unseres Satzes vermieden würde, so müsste man, um nicht gegen das Princip der Energie zu verstossen, Zusatzkräfte einführen, deren Arbeit beständig verschwindet, deren *Richtung* also durch die Geschwindigkeiten mit bestimmt wird. Dann aber könnten die Kräfte nicht mehr unabhängig voneinander nach Wirkung und Gegenwirkung von Punkt zu Punkt wirken, wie doch der ganzen Atomtheorie wesentlich ist.

Aber mag es auch gelingen, durch geeignete Abänderung der Voraussetzungen, z. B. unter Zugrundelegung der Hertz'-

schen „Principien der Mechanik“¹⁾, dem dargelegten Widerspruch zu entgehen, so ist es doch jedenfalls *unmöglich*, auf Grund der *bisherigen* Theorie ohne Specialisirung der Anfangszustände eine mechanische Ableitung des zweiten Hauptsatzes durchzuführen, und es ist ebenso unmöglich, unter den gleichen Voraussetzungen das bekannte Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung unter den Gasmoleculen, wie seine Entdecker Maxwell und Boltzmann wollten, als den nach einiger Zeit sich regelmässig einstellenden stationären Endzustand zu erweisen. Von einer eingehenden Prüfung der bisherigen Versuche einer solchen Ableitung im einzelnen, namentlich der von Boltzmann und Lorentz (in den Berichten der Wiener Akademie)²⁾, habe ich bei der Schwierigkeit des Gegenstandes vorläufig Abstand genommen, um lieber mit möglichster Klarheit darzulegen, was mir hier als streng beweisbar und principiell wichtig erscheint, und dadurch zu einer erneuten Erörterung und schliesslichen Lösung der vorliegenden Frage beizutragen.

Berlin, im December 1895.

1) Die v. Helmholtz'sche Theorie der „cyclischen Systeme“ in ihrer ursprünglichen Form dagegen würde von den Folgerungen des Poincaré'schen Satzes mit betroffen werden, da sie in letzter Linie gleichfalls, wenn auch in anderer Form, auf die Hamilton'schen Gleichungen zurückgeht.

2) Neuerdings zusammengestellt in Boltzmann's „Vorlesungen über Gastheorie“ 1. 1896.

14. Ueber den
Gefrierpunkt verdünnter wässeriger Lösungen;
von E. H. Loomis.

(Hierzu Taf. IV Fig. 1—2.)

Schon vor zwei Jahren habe ich eine Anzahl von Gefrierpunkts-Bestimmungen von verdünnten wässerigen Lösungen veröffentlicht.¹⁾ Nach einer unvermeidlichen Unterbrechung von einem Jahre konnte ich diese Untersuchungen wieder aufnehmen, und die jetzt erhaltenen Resultate bilden den Inhalt der folgenden Zeilen.

Die Methode ist durchaus dieselbe geblieben, so wie ich sie im Einzelnen in den citirten Arbeiten geschildert habe. Die einzige Veränderung am Apparat besteht in einer Vergrößerung der „Gefrieröhre“, die jetzt 200 ccm der Lösung fasst, anstatt, wie früher, 70 ccm: ich glaubte nämlich, dass diese Abänderung eventuell im Stande sei, eine mögliche Fehlerquelle zu eliminiren, die sich aus der Beeinflussung einer geringeren Menge der Lösung durch die Aussentemperaturen ergeben könnte. Es wurde indess der Beobachtungsfehler durch diese Abänderungen nicht verkleinert. Das Thermometer war dasselbe Instrument, das ich bei den früheren Arbeiten benutzte.

Die Beobachtungen wurden im Kellerraum des Gebäudes der „John C. Green School of Science“ ausgeführt, wo bedeutendere Temperaturschwankungen während der ganzen Versuchsdauer leicht vermieden werden konnten: die Temperatur wurde nahe an 0° C. gehalten, besonders mit Hülfe eines in den Versuchsraum sich öffnenden Ventilations-Schachtes. Nach Regulirung des Zuströmens der kalten Luft durch das Fenster schwankte die Temperatur etwa 1—2°. Leider gelang es nicht, die Arbeit bei einer constanten Temperatur von 0° C. auszuführen, wodurch die Untersuchungen einen sonst unerreichbaren

1) Loomis, Wied. Ann. 51. p. 500. 1894.

Grad von Genauigkeit erlangt haben würden. Das Thermometer wurde während der ganzen Beobachtungsdauer innerhalb 1° C. vom Gefrierpunkt gehalten.

Bei der Methode sind besonders 4 Punkte beachtenswerth:

1) Der Gefrierpunkt wird bei Vorhandensein von so geringen Spuren von Eis bestimmt, dass eine Correction für Aenderung der Concentration der Lösung unnöthig ist. (Die Ueberkältung beträgt nur $0,15^{\circ}$ C.) Soviel mir bekannt, ist der Betrag dieser Correction, die bei anderen Methoden so allgemein angewendet wird, noch nicht experimentell bestimmt, und da sie nicht selten 10 Proc. der beobachteten Depression beträgt, so ist es jedenfalls bedenklich, sie ohne experimentelle Prüfung einzuführen.

2) Die Methode schliesst jede Möglichkeit aus, dass die Resultate durch die Willkür des Beobachters beeinflusst werden.

3) Das Thermometer wird abgelesen, wenn die Quecksilbersäule während 1 bis 2 Minuten durchaus stationär ist.

4) Die zu untersuchende Lösung, wie auch das Wasser, mit dem der Nullpunkt des Thermometers bestimmt wurde, befindet sich stets in einem Medium, dessen Temperatur nur $0,3^{\circ}$ C. unter seinem eigenen Gefrierpunkt steht, und ist ferner von diesem durch zwei Glaswände und eine dazwischenliegende Luftschicht sorgfältig isolirt. Auf diese Weise ist die Lösung und ihr „Eis“ im Stande, in einem möglichst adiabatischen Zustande zu ihrer Gleichgewichtstemperatur zu kommen.

Diese Eigenthümlichkeit der Methode empfahl zunächst natürlich ein Bad, dessen Temperatur genau dieselbe war, wie der zu bestimmende Gefrierpunkt: allein bald fand ich, dass dann die beobachteten Gefrierpunkte zu hoch waren. (Nernst's Convergenz-Temperatur), und schliesslich wählte ich die Differenz von $0,3^{\circ}$ C., da ich sah, dass diese die „Convergenz-Temperatur“ auf den gesuchten wirklichen Gefrierpunkt reducirte. Diese Zahl wurde festgestellt dadurch, dass ich beobachtete, bei welcher Temperatur des Bades der bei Gegenwart von geringen Spuren von Eis erhaltene Gefrierpunkt von Wasser mit dem bei Gegenwart von grossen Mengen von Eis erhaltenen übereinstimmt.¹⁾

1) Loomis, Wied. Ann. 51. p. 511. 1894.

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6	7	8
Substanz	m	Gramm per Liter Lösung bei 18°	Spec. Gewicht 18°/4°	Electrisches Leitungsvermögen $K \cdot 10^6$ 18°	Spec. Gewicht Lösung $m = 0.2$ 18°/4°		Ausgangslösungs- hergestellt
KCl	1	74,59	1,0450	919	1,0082	Eimer u. Amend	Direct abgewogen
NH ₄ Cl	1	58,49	1,0152	909	1,0018	Eimer u. Amend	"
BaCl ₂	1/2	103,95	1,0889	655	1,0352	Merck u. Co.	Gerlach's Tab. 1)
MgCl ₂	1/2	47,63	1,0381	$m = 0,20^2)$ 290	1,0148	Eimer u. Amend	Kohlrausch's Tab. 2)
HCl	1	36,45	1,0166	2794	1,0024	Eimer u. Amend	Kohlrausch's Tab. 4)
K ₂ SO ₄	1/2	87,17	1,0662	$m = 0,20^3)$ 304	1,0262	Eimer u. Amend	Direct abgewogen
Na ₂ CO ₃	1/2	71,09	1,0606	474	1,0239	Eimer u. Amend	"
K ₂ CO ₃	1/2	69,14	1,0578	660	1,0231	Trommsdorff	"
Na ₂ CO ₃	1/2	53,06	1,0518	Angenommen von Kohlrausch	1,0208	Präparat im Lab.	"
KNO ₃	1	101,18	1,0603	752	1,0114	Trommsdorff	"
NaNO ₃	1	85,10	1,0546	615	1,0102	Trommsdorff	"
NH ₄ NO ₃	1	80,09	1,0309	831	1,0053	Trommsdorff	"
H ₃ PO ₄	1/2	32,67	1,0166	209	1,0096	Trommsdorff	Hullet's Lit. u. An.

1) Gerlach, Hoffmann's Tabellen. Berlin 1877. p. 121.

2) Kohlrausch, Leitfaden der Physik p. 403. 1892.

3) Lösung $m = \frac{1}{2}$ zufällig weggegossen ehe k bestimmt war.

4) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 38. 1879.

Die bedeutende theoretische Wichtigkeit dieser Gefrierpunkte hat in den letzten Jahren viele sorgfältige Untersuchungen auf diesem Gebiete veranlasst, und manche Fragen haben sich in Bezug auf die verschiedenen angewandten Methoden ergeben. Einigen der wichtigeren dieser Fragen werde ich in einer besonderen Arbeit näher treten.¹⁾

Die vorliegende Beobachtungsreihe (vgl. p. 497) enthält Verbindungen, die sämmtlich Electrolyte sind.

In voranstehender Tabelle, (wie auch fernerhin in dieser Arbeit) bedeutet m die Grammmolecul-Concentration der Lösung d. h., $m = 1$ besagt, dass ein Liter der Lösung so viel Gramm von der Verbindung enthielt, als das Moleculargewicht Einheiten enthält. Tab. I Spalte 4 und 5 geben das specifische Gewicht ($18^\circ/4^\circ$), bez. das electrische Leitungsvermögen der Normallösungen, deren bez. Concentration in Spalte 2 zu finden ist. Ferner giebt die Tabelle, zur bequemen Vergleichung, das specifische Gewicht der Lösungen der Molecul-Concentration $m = 0,20$; und schliesslich den Namen des Fabrikanten, von dem die Verbindungen bezogen wurden, sowie, in der letzten Spalte, einen Hinweis auf die Methode, nach der die betreffende Lösung bereitet wurde.

Die Lösungen.

Die Lösungen, die durch directe Wägung hergestellt wurden, wurden aus sorgfältig umkrystallisirten Salzen gewonnen. Das Trocknen wurde, gemäss den Vorschriften, so sorgfältig, als nach der Natur der Salze möglich war, ausgeführt. Die Lösung H_3PO_4 , $m = \frac{1}{3}$, wurde mir von Hrn. Hullet im Chemischen Laboratorium zu Princeton dargestellt, und ich benutze die Gelegenheit, Hrn. Hullet für die sorgfältige Titrirung und spätere Analyse meinen besten Dank auszusprechen.

Das specifische Gewicht und das electrische Leitungsvermögen der Ausgangslösungen wurde in jedem Falle bestimmt, um ihre correcte Beschaffenheit zu controlliren, und ich kann Hrn. Jones²⁾ nicht beipflichten, wenn er der Ansicht ist, dass

1) Loomis, vgl. p. 521 der folgenden Arbeit.

2) Jones, vgl. Wied. Ann. 53. p. 394. 1894.

specifisches Gewicht und Leitungsvermögen keinen Aufschluss über eventuelle Verunreinigungen der Lösung geben kann. Sicherlich ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass eine aus sorgfältig dargestelltem Salz in Uebereinstimmung mit allgemein angenommenen Tabellen des specifischen Gewichtes hergestellte Normallösung, welcher ferner genau das einer solchen Lösung zukommende specifische Gewicht und electricische Leitungsvermögen besitzt, dass eine solche Lösung nicht „rein“ sein sollte, zum mindesten innerhalb derjenigen Genauigkeitsgrenzen, die bisher bei den gegenwärtig angewandten Methoden zur Bestimmung des Gefrierpunktes erreicht wurden. Man kann es, glaube ich, nicht stark genug betonen, dass bei allen solchen Untersuchungen diese beiden Constanten bestimmt werden sollten, nicht nur um die Möglichkeit einer Controlle zu erhalten, sondern auch um eine Vergleichung mit anderen Resultaten zu erleichtern.

Beim Vergleich der in Tab. I gegebenen Zahlen mit denen bei F. Kohlrausch¹⁾ ist zu ersehen, dass eine genügende Uebereinstimmung vorhanden ist, mit Ausnahme von HCl. Diese Lösung wurde von Hrn. Hullet titirt, und zwar von einer Säure, die von sonst leicht vorhandenen Verunreinigungen frei befunden wurde. Die Normallösung, gegen welche sie ausgetrichen wurde, war normales Na_2CO_3 . Das Na_2CO_3 wurde aus Trommsdorff's c. p. NaHCO_3 durch Glühen bis zu constantem Gewicht dargestellt. Das specifische Gewicht dieser Lösung ist in der voranstehenden Tabelle gegeben.

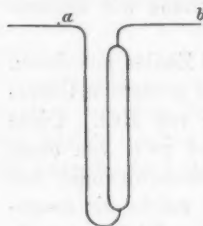
Das electricische Leitungsvermögen wurde nach der bekannten Methode Kohlrausch's gemessen. Die „Widerstandscapacität“ des benutzten electrolytischen Gefässes wurde in der gewöhnlichen Weise gefunden, durch Annahme von Kohlrausch's Werthen für das Leitungsvermögen von NaCl und Na_2CO_3 .

Bestimmung des specifischen Gewichtes.

Das specifische Gewicht wurde mit Hilfe einer von Ostwald modificirten Form des Sprengel-Pyknometers, dessen Volumen (bei 18°C.) 51,3232 ccm betrug, bestimmt. Bei a ist

1) F. Kohlrausch, vgl. Leitfaden der Physik p. 404. 1892.

die Glasröhre zu einem Durchmesser von 1 mm verengt, und dieser Punkt ist durch eine feine rings um die Röhre geätzte Marke bezeichnet. Bei *b* ist die Röhre in eine Spitze ausgezogen, deren Oeffnung kleiner als 1 mm ist, so dass die an diesem Punkt grössere Capillarattraction als an *a* die Flüssigkeit bei *b* festhält, und somit Aenderungen im Volumen des flüssigen Inhaltes bei *a* beobachtet werden können. Der Körper des Pycnometers enthält ferner eine kleine Glaskugel zur leichteren Entfernung von Luftblasen, die sich bisweilen an den inneren Wänden ansetzen. Es wurde jedoch gefunden, dass solche Luftblasen sich nicht bilden, wenn man die Vorsicht braucht, das Pyknometer stets, wenn es ausser Gebrauch ist, mit Wasser zu füllen, sodass seine Wände nicht trocken werden können. Aus diesem Umstand scheint hervorzugehen, dass diese störenden Luftbläschen nicht von Luft herrühren, die in den Flüssigkeiten gelöst ist, sondern von Luft, die an den trocknen Wänden des Glases selbst „condensirt“ ist.



Das Pyknometer wird gefüllt und in ein Wasserbad, dessen Temperatur auf $18^{\circ} \text{C.} \pm 0,05^{\circ}$ gehalten wird, gebracht. Die Lösungen haben gewöhnlich, wenn eingefüllt in das Pyknometer, etwa 20°C. , und deshalb wird die Flüssigkeit im Arm *a*, sobald sie in das kühlere Bad kommt, gegen den Körper des Pycnometer zurückweichen, und zwar zuerst schnell, später langsamer, sobald ihre Temperatur sich der des Bades nähert. Am Punkt *b* fügt man nach Bedarf von Zeit zu Zeit Flüssigkeit hinzu, indem man diesen Punkt mit einem Glasstab oder Stopfen, der mit der Lösung befeuchtet ist, betupft. Wenn die Flüssigkeitssäule bei *a* 1 bis 2 Min. stationär bleibt, so hat die Lösung am Pycnometer dieselbe Temperatur, 18°C. , wie das Bad.

Die Versuche zeigten, dass dasselbe Resultat erzielt wurde, wenigstens so weit als die 5. Decimalstelle in Rechnung kommt, sowohl wenn die Lösung ursprünglich kühler, als auch wenn sie wärmer als 18°C. war.

Ich muss bemerken, dass drei vollständige Serien von Gefrierpunktsbeobachtungen, nämlich von KHO, NaHO und

HNO_3 , verworfen werden mussten, da sich herausstellte, dass ihre specifischen Gewichte und electricischen Leitungsvermögen so sehr von Kohlrausch's Werthen abwichen, dass man eine bedeutende Verunreinigung annehmen musste. Ich hoffe, baldmöglichst bei diesen Verbindungen sowie bei HCl die bez. Gefrierpunkte bestimmen zu können, und zwar mit möglichst genauer Feststellung der specifischen Gewichte und der electricischen Leitungsvermögen der Normallösungen, bei sorgfältigster Darstellung des Materials.

Das bei den vorliegenden Experimenten benutzte destillirte Wasser hatte das electricische Leitungsvermögen: $8,10^{-10}$.

Die Resultate.

Die nachstehenden Tabellen geben die Resultate der Experimente. In Spalte 2 ist die Molecül-Concentration (m) der Lösung gegeben, in Spalte 3 die beobachtete Erniedrigung der Gefrierpunkte (Δ), und in Spalte 4 die Molecular-Erniedrigung (m/Δ). Es ist dies der Werth der Molecular-Erniedrigung, wie ihn Arrhenius berechnet. Raoult und andere rechnen mit Grammmoleculen in *1000 g Wasser*, anstatt in einem Liter der Lösung. Um diesen Werth der Molecular-Erniedrigung zu berechnen, braucht man ferner das specifische Gewicht der Lösung: dieses findet man in der Tab. I in der 6. Spalte, und hiernach kann man den Werth von Δ/m , nach Raoult's Definition, leicht ausrechnen. Die Differenz ist indessen so gering, selbst in den am stärksten concentrirten Lösungen, dass es mir überflüssig erscheint, beide Werthe anzugeben, wie ich es in den früheren Arbeiten that: am höchsten ist die Differenz, mit 1 Proc., bei NH_4NO_3 ¹⁾, $m = 0,20$, während sie bei Na_2CO_3 ganz verschwindet.

1) Anmerkung zu NH_4NO_3 .

Es ist zu bemerken, dass, wenn die Lösung von NH_4NO_3 concentrirter ist als $m = 0,05$, das Steigen des Thermometer nach Beginn des Frierens *ausserordentlich langsam* ist. Aehnlich ist es bei NH_4Cl , jedoch nicht so auffallend. Das gewöhnliche plötzliche „Hochschnellen“ des Quecksilbers, wenn das Frieren nach einer Ueberkältung der Flüssigkeit beginnt, *fehlt völlig*. Ferner ist zu bemerken, dass das „Eis“ ein milchiges Aussehen hat, ganz entgegengesetzt dem krystallinischen Aussehen in anderen Fällen. Dieselbe Beobachtung wurde bei den Lösungen MgCl_2 , $m = 0,15; 0,20; 0,25; 0,30$ gemacht. Die beobachteten Erniedri-

Tabelle II.

1. Substanz	2. Gramm- Mol. in Liter Lösung $\frac{m}{m}$	3. Gefrierpunkts- erniedrigung Δ	4. Molecular- erniedrigung $\frac{\Delta}{m}$	5. Theoret. Mole- culare erniedrig- $\frac{\Delta}{m}$	6. Theoretische Gefrierpunkts- erniedrigung Δ th	7. Δ th — Δ gef.	8. Δ th — Δ gef. in Proc. von Δ gef.
KCl	0,01	0,0380°	3,60	3,65	0,0365°	+0,0005	+1,3
	0,02	0,0709	3,55	3,62	0,0724	+0,0015	+2,1
	0,03	0,1065	3,52				
	0,035	0,1285	3,53	3,56	0,1780	+0,0081	+1,7
	0,05	0,1749	3,50	3,498	0,3498	+0,0063	+1,5
	0,10	0,3445	3,445	3,441	0,6882	+0,0074	+1,1
	0,20	0,6808	3,404				
NH ₄ Cl	0,40	1,3411	3,353				
	0,01	0,0356	3,56	3,67	0,0367	+0,0011	+3,2
	0,02	0,0711	3,56	(3,64)	(0,0728)	+0,0017	+2,3
	0,035	0,1224	3,50				
	0,05	0,1740	3,48	3,58	0,1790	+0,0050	+2,8
	0,10	0,3484	3,434	3,515	0,3515	+0,0081	+2,4
	0,20	0,6792	3,396	(3,470)	(0,6940)	+0,0148	+2,2
HCl	0,40	1,3578	3,393				
	0,01	0,0361	3,61	3,71	0,0371	+0,0010	+2,8
	0,02	0,0719	3,60	3,69	0,0738	+0,0019	+2,6
	0,05	0,1797	3,59	3,66	0,1830	+0,0083	+1,9
	0,10	0,3546	3,546	3,616	0,3616	+0,0070	+2,0
	0,20	0,7180	3,565	8,563	0,7126	—0,0004	±0
	0,30	1,0837	3,612				

1. Substanz	2. Gramm- Mol. in Liter Lösung m	3. Gefrierpunkts- erniedrigung Δ	4. Molecular- erniedrigung $\frac{\Delta}{m}$	5. Theoret. Mole- cularerniedrig- $\frac{\Delta}{m}$	6. Theoretische Gefrierpunkts- erniedrigung Δ th	7. Δ th — Δ gef.	8. Δ th — Δ gef. in Proc. von Δ gef.
<chem>BaCl2</chem>	0,01	0,0499°	4,99	(5,20)	(0,0520°)	+ 0,0021	+ 4,4
	0,02	0,0990	4,95	(4,92)	(0,0984)	— 0,0006	— 0,6
	0,05	0,2385	4,77	4,74	0,2370	— 0,0015	— 0,6
	0,10	0,4690	4,690	(4,58)	(0,458)	— 0,0110	— 2,3
	0,20	0,9310	4,655	(4,36)	(0,872)	— 0,0590	— 6,3
<chem>MgCl2</chem>	0,01	0,0514	5,14	Keine Daten zu- gänglich			
	0,02	0,1014	5,07				
	0,05	0,2489	4,98				
	0,10	0,4948	4,948				
	0,15	0,7444	4,965				
<chem>K2SO4</chem>	0,20	1,0039	5,019	Keine Daten zu- gänglich			
	0,25	1,2699	5,079				
	0,30	1,5557	5,186				
	0,01	0,0492	4,92		0,0495	+ 0,0003	+ 0,6
	0,02	0,0952	4,76		(0,0952)	± 0	± 0
<chem>Na2SO4</chem>	0,05	0,2271	4,54	4,52	0,2260	+ 0,0011	+ 0,5
	0,10	0,4317	4,317	4,328	0,4328	+ 0,0011	+ 0,2
	0,20	0,8134	4,067	(4,13)	(0,8260)	+ 0,0130	+ 1,6
	0,30	1,1672	3,891				
	0,01	0,0509	5,09	(4,96)	(0,0496)	— 0,0013	— 2,5
	0,02	0,0974	4,87	(4,74)	(0,0948)	— 0,0026	— 2,5
	0,05	0,2297	4,59	4,49	0,2247	— 0,0050	— 2,2
	0,10	0,4340	4,340	(4,26)	(0,4260)	— 0,0080	— 1,8
	0,20	0,8141	4,071	(3,97)	(0,7940)	— 0,02	— 2,5
	0,30	1,1604	3,875				

1. Substanz	2. Gramm- Mol. in Liter Lösung $\frac{m}{m}$	3. Gefrierpunkts- erniedrigung Δ	4. Molecular- erniedrigung $\frac{\Delta}{m}$	5. Theoret. Mole- cularerniedrig. $\frac{\Delta}{m}$	6. Theoretische Gefrierpunkts- erniedrigung Δ th	7. Δ th - Δ gef.	8. Δ th - Δ gef. in Proc. von Δ gef.
K_2CO_3	0,01	0,0507°	5,07	(4,66)	0,0466° (0,0898) 0,2135 (0,4090) (0,7820)	-0,0041° -0,0088 -0,0221 -0,0450 -0,0950	$\mu_\infty = 140$ - 8 - 9 - 10 - 11
	0,02	0,0986	4,93	(4,49)			
	0,05	0,2356	4,71	4,27			
	0,10	0,4540	4,540	(4,09)			
	0,20	0,8770	4,385	(3,91)			
Na_2CO_3	0,01	0,0507	5,07	(4,54)	(0,0454) (0,0864) 0,2015 (0,3780) (0,710)	-0,0053 -0,0122 -0,0306 -0,0640 -0,1240	$\mu_\infty = 122$ - 10 - 12 - 13 - 15 - 15
	0,02	0,0986	4,93	(4,32)			
	0,05	0,2321	4,64	4,03			
	0,10	0,4416	4,416	(3,78)			
	0,20	0,8339	4,170	(3,55)			
KNO_3	0,01	0,0346	3,46	3,62	0,0362 (0,0716) 0,1750 0,3409 (0,662)	+0,0017 +0,0013 +0,0045 +0,0095 +0,023	$\mu_\infty = 104$ - 10 - 12 - 13 - 15 - 15
	0,02	0,0703	3,52	(3,58)			
	0,025	0,0865	3,46	3,50			
	0,05	0,1705	3,41	3,409			
	0,10	0,3314	3,314	(3,31)			
	0,20	0,6388	3,194				

1. Substanz	2. Gramm- Mol. in Liter Lösung $\frac{g}{m}$	3. Gefrierpunkts- erniedrigung Δ	4. Molecular- erniedrigung $\frac{\Delta}{m}$	5. Theoret. Mole- cularerniedrig- ung $\frac{\Delta}{m}$	6. Theoretische Gefrierpunkts- erniedrigung Δ th	7. Δ th - Δ gef.	8. Δ th - Δ gef. in Proc. von Δ gef.
NaNO ₃	0,01	0,0355°	3,55	3,65 (3,62)	0,0365° (0,0724)	+0,0010° +0,0034	+2,8 +5,0
	0,02	0,0690	3,45				
	0,025	0,0866	3,46				
	0,05	0,1722	3,44	3,55	0,1775	+0,0053	+3,1
	0,10	0,3428	3,428	3,472 (3,409)	0,3472 (0,6918)	+0,0044 +0,0129	+1,3 +1,9
NH ₄ NO ₃	0,20	0,6689	3,345				
	0,01	0,0358	3,58				
	0,02	0,0707	3,54				
	0,025	0,0873	3,49				
	0,05	0,1737	3,47				
H ₃ PO ₄	0,10	0,3424	3,424				
	0,20	0,6641	3,321				
	0,01	0,0282	2,82				
	0,02	0,0536	2,68				
	0,05	0,1245	2,49				
	0,10	0,2358	2,358				
	0,20	0,4498	2,249				

Der Werth der Erniedrigung in Spalte 3 ist das Mittel aus 5 bis 9 *gänzlich voneinander unabhängigen* Bestimmungen, welche im Durchschnitt Schwankungen von ca. $0,001^{\circ}\text{C}$. zeigen. Die *grösste* Durchschnittsschwankung, die in irgend einer vollständigen Reihe beobachtet wurde, war $0,0013^{\circ}\text{C}$. bei BaCl_2 (43 einzelne Beobachtungen), die *kleinste* Durchschnittsschwankung war $0,0006^{\circ}\text{C}$. bei Na_2CO_3 (63 einzelne Beobachtungen). Dies ist fast genau dieselbe Variation, die in den früheren Beobachtungsreihen gefunden wurden, und es geht daraus hervor, dass die Vergrösserung der Gefrieröhre die Fehlerquellen nicht beeinflusst hat.

Graphische Darstellung der Resultate.

Die Werthe von Δ/m als Function von m sind graphisch in Taf. IV Fig. 1 dargestellt: die Ordinaten geben die Werthe von Δ/m , die Abscissen die von m . Um Verwirrung zu vermeiden, sind die Nitate für sich in Fig. 2 gegeben. Die Scala ist dieselbe wie bei der früheren Arbeit. Zugleich mit der neuen Serie sind die Werthe für NaCl und H_2SO_4 nach den Beobachtungen im Jahre 1893 dargestellt: zu denen von NaCl ist ein weiterer zugefügt, wo $m = 0,40$ ist, und damit ist der Verlauf der Curve über $m = 0,20$ hinaus festgestellt. Die Methode *Molecular-Erniedrigungen* anstatt der wirklichen Erniedrigungen darzustellen, empfiehlt sich deshalb, weil sie allein im Stande ist, auf den ersten Blick die allgemeine Natur der Resultate zu zeigen, und weil sie die Genauigkeit der Methode illustriert: beides ist unersichtlich, wenn die Erniedrigungen selbst graphisch dargestellt werden. Einerseits sind dann die *Abweichungen* von Blagden's Gesetz der stricten Proportionali-

gungen werden offenbar durch die Langsamkeit, mit der die Lösung ihre Gleichgewichtstemperatur erreicht, beeinflusst, und sind zu *gross*. Bei NH_4NO_3 , $m = 0,20$, wurde diese Thatsache experimentell bestätigt, und es ergab sich, dass das Temperaturmaximum in der gewöhnlichen Dauer von 2 Min. nicht erreicht wurde, sondern dass mindestens 5 Min. dazu nöthig waren, und dass am Ende dieser Zeit die Ablesung volle $0,005^{\circ}\text{C}$. höher war, als nach Verlauf von 2 Min.

Eine derartige Differenz wurde bei MgCl_2 nicht beobachtet, woraus hervorgeht, dass hier das Maximum in den gewöhnlichen 2 Min. erreicht wurde. Es wurde keine Correction angewendet, da diese Erscheinungen noch nicht völlig aufgeklärt ist.

tät von Depression und Concentration so gering im Vergleich mit den totalen Erniedrigungen, dass sie in der graphischen Darstellung der Erniedrigungen nicht zum Ausdruck kommen. So z. B. differirt bei Na_2CO_3 , wo die Abweichungen am stärksten sind, die Curve so wenig von einer geraden Linie, dass sie nur bei genauerer Prüfung von dieser unterschieden werden kann. Andererseits sind wahrscheinliche Fehler von vielen Tausend Theilen eines Grades in den Curven der Erniedrigungen kaum bemerkbar.

Die Curven sind meist durch 5 Beobachtungen bestimmt, und diese Punkte sind durch gerade Linien verbunden. In der grössten Zahl der Fälle erscheinen die experimentellen Fehler verhältnissmässig so klein, dass es vielleicht berechtigt gewesen wäre, eine *vollständige* Regelmässigkeit der Resultate anzunehmen, und die Punkte durch die wahrscheinlichste Curve zu verbinden, wie es in den früheren Arbeiten geschah.

Diese 5 Beobachtungen waren bei MgCl_2 , $m = 0,01$, $m = 0,02$, $m = 0,05$, $m = 0,10$ und $m = 0,20$ so auffallend, dass 3 weitere angestellt wurden: $m = 0,15$, $m = 0,25$ und $m = 0,30$. Ebenso wurde bei KCl und NH_4Cl je eine weitere Beobachtung für $m = 0,40$ gemacht, um zu constatiren, ob die convergirenden Curven in Wirklichkeit sich irgendwo, nahe $m = 0,20$ schneiden. Es muss hinzugefügt werden, dass diese beiden Beobachtungen nebst der von NaCl an demselben Punkte unmittelbar nach einer besonderen Bestimmung des Nullpunktes des Thermometer gemacht wurden, sodass ein Fehler im Nullpunkt die relativen Erniedrigungen dieser drei Salze nicht beeinflussen konnte. Dieselbe Vorsicht wurde bei den beiden Beobachtungen von Na_2SO_4 und K_2SO_4 bei $m = 0,05$, und $m = 0,30$ angewandt, und es kann daher kein Zweifel darüber möglich sein, dass die Glieder dieser Curvenpaare sich in der Region von $m = 0,20$ schneiden.

Discussion der Resultate.

Sehen wir von jeder Theorie ab, so ergiebt sich hier sowie bei den früher studirten Electrolyten Folgendes.

1) Die Molecular-Erniedrigung nimmt continuirlich mit der Verdünnung zu. Die einzigen Ausnahmen bilden MgCl_2 und HCl in der Region stärkerer Concentration: beide liefern

somit einen *Minimal*-Werth der Molecular-Erniedrigung bei $m = 0,10$. Bei MgCl_2 ist dieses Minimum ausgesprochen, bei HCl ist es vielleicht weniger auffallend, aber doch ebenso sicher gestellt, da gerade wegen eines möglichen Zweifels in Betreff dieses Minimum bei HCl der Werth für $m = 0,30$ bestimmt wurde. Die Lage dieses neuen Punktes macht die Existenz des Minimums bei ungefähr $m = 0,10$ zur Sicherheit. — Eben dieses Minimum zeigt sich in den Resultaten von Arrhenius¹⁾ bei MgCl_2 obgleich er diese Erscheinung offenbar ausnahmsweise grossen Fehlern zuzuschreiben scheint, da er in seiner Discussion der Resultate nichts davon erwähnt. Ebenso deuten die Beobachtungen von Jones²⁾ unverkennbar bei HCl die Gegenwart eines solchen Minimums an, obgleich auch er nicht auf dasselbe aufmerksam macht, sondern im Gegentheil die *Regelmässigkeit* der Resultate betont³⁾, sodass er der Ansicht zu sein scheint, dies Minimum sei einem Fehler von ca. $0,002^\circ \text{C}$. zuzuschreiben.

2) Alle Curven sind mehr oder weniger concav auf der oberen Seite.

3) Es scheint nunmehr, dass sich die bisher untersuchten Electrolyte scharf in zwei Gruppen theilen: die *erste* besteht aus Verbindungen, die einwerthige Säure und basisches Radical enthalten, NaCl , KCl , HCl , NH_4Cl , KNO_3 , NaNO_3 , NH_4NO_3 , die *zweite* aus solchen, die zweiwerthige Radicale enthalten, MgCl_2 , BaCl_2 , MgSO_4 , H_2SO_4 , Na_2SO_4 , K_2SO_4 , Na_2CO_3 , K_2CO_3 . Diese beiden Gruppen unterscheiden sich durch zwei Eigenthümlichkeiten: der *Betrag* der Molecular-Erniedrigung des Gefrierpunktes ist auffallend verschieden, und ebenso das Verhältniss, nach dem dieser mit dem Zunehmen der Verdünnung zunimmt. Daher liegen auf Taf. I Fig. 1 und 2 die beiden Gruppen für sich, und während die Curven der ersten (HCl etc.) eine leichte Biegung zeigen, weisen die der zweiten in der Region starker Verdünnung eine starke Aenderung der Biegung auf.

4) Aus dem regelmässigen Verlauf der Resultate, wie er

1) Arrhenius, Zeitschr. Phys. Chem. 2. p. 496. 1888.

2) Jones, l. c. 12. p. 623.

3) E. H. Loomis, l. c. p. 628. 1893.

sich besonders in den einzelnen Curven ausdrückt, ergibt sich, dass nirgends in der untersuchten Region irgend ein plötzlicher Wechsel der Eigenschaften der Lösungen auftritt, wenigstens soweit der Gefrierpunkt in Betracht kommt. Die Unregelmässigkeiten, die auftreten (KCl , KNO_3), weisen darauf hin, dass die Beobachtungsfehler an den betreffenden Punkten sehr gross waren, mindestens $0,0006^\circ \text{C.}$, und obgleich dieser Fehler, im Vergleich mit den übrigen Resultaten, hier grösser als zuverlässig erscheint, so glaube ich doch, dass der Verlauf der Curve in den anderen Regionen anzeigt, dass die Unregelmässigkeiten bei extremen Verdünnungen Irrthümern zuzuschreiben sind.

5) Was den bedeutenden Unterschied der Gefrierpunkte von stärker concentrirten Lösungen, die zu derselben Gruppe gehören, anbelangt, so ist es eine *bemerkenswerthe Thatsache*, dass die Curven, die ihre Molecular-Erniedrigungen darstellen, schnell mit zunehmender Verdünnung convergiren, und zwar so, dass man vielleicht annehmen könnte, *dass sie bei extremster Verdünnung vielleicht denselben Gefrierpunkt haben*. Dieses Convergiren ist um so auffallender, wenn man beachtet, wie sehr die beiden Extreme der 2. Gruppe, MgCl_2 und Na_2SO_4 , in ihren Gefrierpunkten bei der Concentration $m = 0,30$ differiren (vgl. Taf. I). Hier liegen die Gefrierpunkte der beiden Lösungen um $0,395^\circ \text{C.}$ von einander, während bei $m = 0,01$ der Unterschied nur $0,0004^\circ$ beträgt. Aehnlich ist es in der 1. Gruppe, wo die beiden Extreme HCl und KCl sich bei $m = 0,30$ um $0,07^\circ \text{C.}$ unterscheiden, während bei $m = 0,01$ die Differenz verschwindend klein ist.

Als Ausnahmen sind in der 1. Gruppe NH_4Cl und KNO_3 , in der 2. Gruppe BaCl_2 , H_2SO_4 und MgSO_4 zu bemerken. (Ueber MgSO_4 vgl. auch die frühere Arbeit). Die beiden letzteren sind wesentliche Ausnahmen; die anderen zeigen solche Unregelmässigkeiten der Curven in der Region grosser Verdünnung, dass dadurch, wie oben erwähnt, Beobachtungsfehler angezeigt werden.

Bemerkenswerth ist, dass H_3PO_4 isolirt steht, und trotzdem sie ein dreiwerthiges Radical enthält, den Gefrierpunkt weniger erniedrigt, als die Gruppe mit einwerthigen Radicalen. Ich hoffe, später im Stande zu sein, andere analoge

Verbindungen zu studien, um ihre Gefrierpunkte mit dem von H_3PO_4 vergleichen zu können.¹⁾

Beziehung der Resultate zur „Dissociations-Theorie“.

Die Beziehung der vorliegenden Resultate zur „Dissociations-Theorie“ erkennt man, wenn man die beobachteten Erniedrigungen Δ in Spalte 3 mit der Spalte 6 vergleicht, welche die Werthe der auf Grund dieser Theorie berechneten Erniedrigungen ausdrückt.²⁾ Die theoretischen Werthe der Molecular-Erniedrigungen findet man ferner in Spalte 5. Gemäss der Theorie wird der „Dissociations-Grad“ bei einer beliebigen Lösung durch das Verhältniss μ_x/u_∞ dargestellt, wobei μ_x das moleculare Leitungsvermögen der Lösung in der gegebenen Concentration x ist, ausgedrückt in Gramm-Aequivalent-Moleküle pro Liter; μ_∞ ist der Grenzwert dieser Leitungsvermögens, wenn x sich der Grenze 0 nähert: oder, wie gewöhnlich ausgedrückt, der Werth des molecularen Leitungsvermögens in unendlicher Verdünnung. Für μ_x sind die Werthe, die Kohlrausch fand, gewählt, und für μ_∞ die Werthe, die von ihm als die wahrscheinlichsten bezeichnet sind.³⁾

1) Anmerkung zu H_3PO_4 . — Was die vorliegenden Werthe für Phosphorsäure anbetrifft, so braucht nur bemerkt zu werden, dass die früheren Reihen bekanntlich nur insofern von Bedeutung waren, als die Regelmässigkeit der beobachteten Erniedrigungen die Genauigkeit der Methode beleuchtete. Es wurde ausdrücklich constatirt, dass die Phosphorsäure abnorme Werthe sowohl betreffs des specifischen Gewichtes, als auch des electrischen Leitungsvermögens zeigte, (vgl. die Anmerkung: Phys. Review 1. p. 282), wobei das letztere bis um 7 Proc. stieg. Die damals untersuchte Probe von Phosphorsäure war die einzige, die mir zur Hand war, und da ihre Reinheit einige Jahre früher geprüft war, so benutzte ich sie. Bei ihrer Untersuchung wurde jedoch ihre grosse Unreinheit entdeckt, wie in der citirten Note angegeben wurde. Das Material, das zur vorliegenden Untersuchung gebraucht wurde, stammt von Trommsdorff: die Normallösung wurde von Hrn. Hullet titrirt und dann analysirt, und es fand sich in ihr 70,92 g P_2O_5 pro Liter. Dies entspricht einer Gramm-Molecularstärke von 0,3329, anstatt von $\frac{1}{3}$, wie die Titrirung verlangt, eine Differenz, die man füglich vernachlässigen kann. Ihr specifisches Gewicht ist jetzt in völliger Uebereinstimmung mit dem von Kohlrausch gefundenen, wenngleich das electrische Leitungsvermögen 209 ist, anstatt 200, wie bei Kohlrausch.

2) Loomis, vgl. die Noten in der früheren Arbeit: Ann. Wied. 51. p. 520. 1894.

3) F. Kohlrausch, vgl. Wied. Ann. 26. p. 198 und 204. 1888.

Bei NH_4NO_3 und MgCl_2 sind keine Angaben zur Berechnung der theoretischen Werthe von Δ und Δ/m vorhanden. Bei H_3PO_4 sind keine theoretischen Werthe gegeben, da zur Zeit unsere Kenntniss der Art ihrer Dissociation so ungenügend zu sein scheint.

Man muss sich daran erinnern, dass die Concentration der Lösung von Kohlrausch mit μ bezeichnet wurde, wobei er die Concentration in Gramm-Aequivalent-Moleculen ausdrückte, während in der vorliegenden Arbeit m die Concentration in Gramm-Moleculen darstellt. So z. B. ist die Lösung BaCl_2 , $m = 1$ bei Kohlrausch als BaCl_2 , $\mu = 2$ vertreten, und die Lösung, die bei Kohlrausch als H_3PO_4 , $\mu = 1$ bezeichnet ist, würde hier durch H_3PO_4 , $m = \frac{1}{3}$ gegeben sein.

Die Werthe von Spalte 5 und 6 die eingeklammert sind, wurden durch graphische Interpolation gefunden und können in der Region grösster Concentration bedeutenden Fehlern unterworfen sein.

Ausserdem enthält Spalte 7 die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der Erniedrigung Δ , und Spalte 8 drückt, zur bequemeren Vergleichung, diese Differenz in Procenten der beobachteten Werthe aus.

Es ist nicht in Abrede zu stellen, dass bei KCl und F_2SO_4 die Uebereinstimmung thatsächlich vollständig ist. Bei NH_4Cl , HCl , BaCl_2 , Na_2SO_4 , KNO_3 , NaNO_3 ist die Uebereinstimmung noch überraschend, und kann kaum als „zufällig“ unbeachtet bleiben. Indessen können die Differenzen in diesen letzteren Fällen wenigstens nicht mit Sicherheit durch constante Beobachtungsfehler erklärt werden, da diese Annahme verlangen würde, dass alle beobachteten Werthe gleichmässig entweder „zu hoch“ oder „zu niedrig“ sein sollten: während indess im allgemeinen die vorliegenden Resultate niedriger als die theoretischen Werthe befunden wurden, muss man bei BaCl_2 und Na_2SO_4 constatiren, dass sie *höher* sind.

Ferner ist überraschend, dass die beiden *auffallenden* Fälle von Differenz zwischen beobachteten und theoretischen Werthen K_2CO_3 und Na_2CO_3 sind: gerade die zwei, bei denen wegen der Ungewissheit in Betreff des Werthes von μ_∞ eine Berechnung der theoretischen Werthe kaum mehr als eine Schätzung genannt werden kann. Jedenfalls ist — in Be-

rücksichtigung des allgemeinen Verlaufs aller anderen Curven in Kohlrausch's graphischer Darstellung seiner Resultate¹⁾ — der von ihm gewählte Werth von μ_{∞} der wahrscheinlichste für diese Fälle, nämlich 140 bei K_2CO_3 und 122 bei Na_2CO_3 . Wenn man indessen den höchsten beobachteten Werth von μ_{∞} für den Grenzwert, μ_{∞} , d. h. 122 für K_2CO_3 , und 104 für Na_2CO_3 wählt, (was ein ganz willkürliches Verfahren nach dem Stande unserer gegenwärtigen Kenntniss ist), so werden dann die theoretischen Werthe der Erniedrigungen fast identisch mit denen, die für verdünnte Lösungen K_2CO_3 beobachtet wurden, und bei Na_2CO_3 ist die Uebereinstimmung vielleicht so genau, wie die Vertheidiger der Theorie verlangen können (vgl. in den Tabellen Spalte 8 für zwei Reihen von procentuellen Differenzen für K_2CO_3 und Na_2CO_3).

Wie oben bemerkt wurde, zeigt der Lauf der Curven für die Molecular-Erniedrigungen von $BaCl_2$, NH_4Cl und KNO_3 an, dass in der Region grösster Verdünnung die Werthe offenbar durch ungewöhnlich grosse Beobachtungsfehler beeinflusst werden, und es scheint nunmehr, dass diese offenbaren Fehler an den Punkten auftreten, wo die Differenz zwischen beobachteten und theoretischen Werthen am bedeutendsten gefunden wurde.

Was die Differenzen im allgemeinen anbetrifft, so betragen sie bis zu 2,5 Proc., was in den Fällen grösster Verdünnung einen Unterschied von ca. 0,0015° C. bedeutet. Mit zunehmender Concentration wächst gewöhnlich der Procentsatz der Differenz und erreicht 6 Proc. bei $BaCl_2$, $m = 0,20$. Bei den stärksten Concentrationen kann im allgemeinen der Procentsatz der Differenz annäherungsweise als 3 Proc. gesetzt werden, wenn er einer wirklichen Differenz entsprechen soll, die sich auf die *Hunderttheile* eines Grades erstreckt. Derartige Differenzen sind sowohl bei verdünnten als bei concentrirten Lösungen vielmals grösser als irgend welche experimentelle Fehler, die nach der Methode und ihren Resultaten zulässig zu sein scheinen.

Die Dissociationstheorie verlangt ferner, dass die Kaliumsalze durchweg den Gefrierpunkt mehr als die entsprechenden

1) F. Kohlrausch, vgl. Wied. Ann. 26. p. 10. Fig. 1 u. 2.

Natriumsalze erniedrigen: es folgt dies direct aus der Thatsache, dass der Dissociationsgrad bei den ersteren allgemein grösser ist. Die vorliegenden Resultate zeigen indessen das Gegentheil: nur die Carbonate machen eine Ausnahme.

Bei Nitraten wird eine Vergleichung der Erniedrigungen durch die Verwirrung der Curven bei extremen Verdünnungen erschwert.

Die Erniedrigungen von KCl sind geringer als die von NaCl, jedoch muss man in Erwägung ziehen, dass die Reihe von NaCl die einzige war, die bei einer Zimmertemperatur von 18°C . bestimmt wurde, und dass, wie ich nunmehr überzeugt bin, zuverlässige Resultate nur bei einer Temperatur, die 0°C . nahe steht, zu erhalten sind. Die Versuche mit NaCl müssen deshalb, wie ich glaube, wiederholt werden, bevor eine definitive Vergleichung der Erniedrigungen von KCl und NaCl möglich ist, wengleich es keinem Zweifel unterliegt, dass, in Bezug auf die Beobachtungen bei $m = 0,40$, die Erniedrigung des Gefrierpunktes bei NaCl viel bedeutender ist, als bei KCl.

Genauigkeit der Methode.

In meiner früheren Arbeit habe ich bekanntlich zwar die experimentellen Daten nebst einigen Betrachtungen gegeben, nach denen der Leser selbst im Stande ist, die Genauigkeit der Methode zu beurtheilen: ich habe aber keinen Versuch gemacht, die letztere zahlenmässig zu bestimmen. Dasselbe Verfahren behalte ich jetzt bei, und das jetzt vorliegende, ausgedehntere experimentelle Material soll dazu dienen, die Sache etwas näher zu beleuchten.

Jetzt, wie damals, stehen wir vor zwei fundamentalen Fragen.

1. Wie weit kann man sich auf die Constanz dieser feinen Quecksilberthermometer verlassen?
2. Welche Uebereinstimmung zeigt sich unter den einzelnen Beobachtungen einer Reihe, deren Mittelwerth als der gesuchte Gefrierpunkt angenommen ist?

Die Antwort auf die zweite Frage ist durch das neue Material nicht weiter beeinflusst worden; jetzt, wie damals, zeigt eine Reihe von fünf ganz verschiedenen Beobachtungen im Durchschnitt eine Variation von $0,001^{\circ}\text{C}$.

Diese Variation kann dreierlei Ursache haben: 1. Unter der Annahme, dass die Temperatur der Lösung bei jeder der verschiedenen Beobachtungen *dieselbe* war, könnte die Schwankung auf die Beschaffenheit des Thermometers selbst zurückgeführt werden. 2. Gesetzt, dass das Thermometer thatsächlich die Temperatur seiner Kugel anzeigt, so könnte die Schwankung einer Unvollkommenheit der Methode zugeschrieben werden, die ausser Stande ist, die Lösung bei jeder besonderen Bestimmung auf ihren Gefrierpunkt zu bringen. 3. Eine Variation der in die Luft hinausragenden Quecksilbersäule könnte eventuell für diese Schwankung verantwortlich gemacht werden.

Die Schwankung lässt sich nicht auf Ablesungsfehler zurückführen: Bei der gegenwärtigen Methode können letztere bei den experimentellen Fehlern absolut nicht mitspielen. Es ist ausser allem Zweifel, dass $\frac{1}{100}$ Thermometergrad bis $0,00005^{\circ}\text{C}$. genau abgelesen werden kann.

Es ist die Frage, ob die *Ablesungen* überhaupt die *Temperatur* der Lösung anzeigen können. Da der Ablesungsfehler im Vergleich mit den oben genannten Fehlern unbedeutend ist, so habe ich meine Aufmerksamkeit ausschliesslich auf die Eliminirung der letzteren gerichtet, anstatt auf die ganz oberflächliche Verbesserung, eine Verminderung der Ablesungsfehler durch Anwendung stärkerer mikroskopischer Vergrösserung oder durch feinere Eintheilung des Thermometers zu versuchen.

Was die *erste* der oben gestellten Fragen anbetrifft, so will ich versuchen, eine Antwort in derselben Weise, wie in der früheren Arbeit zu geben.

Zu diesem Zwecke dient die folgende Tabelle, in der alle während dreimonatlicher Beobachtungsdauer beobachteten Nullpunkte des Thermometers zusammengestellt sind.

Diese Tabelle bedarf keiner weiteren Erklärung, als der Angabe, dass die Correction für Druck, die in dem das Thermometer begleitenden Certificat als $0,001^{\circ}\text{C}$. für eine Aenderung von 6 mm im Barometerstand angegeben war, in der Reichsanstalt zu Berlin bestimmt wurde. Die Correction für Zimmertemperatur war die übliche, wonach man annimmt, dass der ganze hervorragende Quecksilberfaden auf Zimmertemperatur steht. Der scheinbare Ausdehnungscoefficient für Quecksilber in Glas wurde als 0,000156 angenommen.

Tabelle III.

1 Zeit 1895	2 Barometer- stand	3 Zimmer- temperatur	4 Beobachteter Nullpunkt	5 Nullpunkt auf 0° C. und 760 mm corrigirt
Januar 2	762,0	+5° C.	0,0416°	0,0397°
7	759,7	10	0,0485	0,0404
14	756,7	0	0,0407	0,0412
21	756,0	2	0,0416	0,0416
25	765,3	2	0,0413	0,0397
28	764,3	0	0,0404	0,0397
29	754,1	2	0,0393	0,0397
30	757,4	0°—4°	0,0391	0,0389
Februar 4	754,4	3	0,0402	0,0402
5	760,1	3	0,0402	0,0392
11	760,6	4	0,0407	0,0394
13	746,9	2	0,0402	0,0418
18	754,6	5	0,0420	0,0414
20	754,1	6	0,0422	0,0414
25	759,8	4	0,0420	0,0408
27	761,6	5	0,0428	0,0407
März 4	754,5	8	0,0439	0,0423
5	764,0	9	0,0457	0,0422
6	769,4	7,5	0,0455	0,0416
13	761,1	10	0,0460	0,0427
14	758,4	10	0,0450	0,0421
18	754,0	7	0,0432	0,0420
19	757,6	6,5	0,0420	0,0404
20	759,2	5	0,0416	0,0402
25	757,7	7,5	0,0437	0,0417

Die Resultate sind auf Taf. IV Fig. 8 graphisch dargestellt, wo die punktirte Zickzacklinie den beobachteten, und die ausgezogene den corrigirten Nullpunkt zeigt. Die Scala ist hier 5,8 mm zu $\frac{1}{1000}^{\circ}$ C.¹⁾ Sie hat also dieselbe Empfindlichkeit, wie die Curven der Molecularerniedrigungen in der Region extremer Verdünnung. Da die Länge einer $\frac{1}{100}^{\circ}$ Theilung am Thermometer 0,4 mm ist, so wurden in der Figur die wirklich beobachteten Variationen der Thermometer 150fach vergrößert.

Man beobachtet nun Folgendes:

1. Der Nullpunkt des Instrumentes ist während der Periode der Ruhe bei gewöhnlicher Temperatur (März 1893 bis Ja-

1) Durch einen Fehler ist die Scala 5,8 anstatt 5 mm pro $\frac{1}{1000}^{\circ}$ C. gemacht.

nuar 1895) von $0,029-0,040^{\circ}$, also etwa um $0,0005^{\circ}$ C. im Monat gestiegen. Dies würde ein Steigen von etwa $0,0015^{\circ}$ C. während der Beobachtungsperiode anzeigen. In Fig. 6 stellt die gerade Linie ein solches gleichmässiges Steigen von $0,002^{\circ}$ C. während dieser drei Monate dar. Das wirklich beobachtete Steigen beträgt $0,0020^{\circ}$ C., eine Uebereinstimmung, die indessen wahrscheinlich nur zufällig ist, da selbstverständlich die Annahme eines gleichmässigen Steigens des Nullpunktes eines Thermometers nicht garantirt ist, selbst wenn das Instrument, wie hier, lange liegen gelassen wurde.

2. Ferner scheint der Zickzackverlauf des Nullpunktes durch zwei Gesetze beeinflusst zu werden. a) Wenn das Thermometer länger als eine Nacht ruhte, so blieb der Nullpunkt entweder constant, wie z. B. während der Periode 25.—28. Januar und 5.—11. Februar, oder er stieg schnell, wie z. B. in den Perioden 11.—13. Februar, 27. Februar bis 4. März etc.: die einzige Ausnahme bildet die Periode 21.—25. Januar. b) Wenn das Thermometer zwei Tage nach einander gebraucht wurde, so zeigte sich, dass der Nullpunkt am zweiten Tage deutlich erniedrigt war, so z. B. 29.—30. Januar, 4.—5. Februar etc., die einzige Ausnahme bildet hier 4.—5. März. Sollte es möglich sein, dass die lange fortgesetzte Erschütterung des Thermometers während eintägiger Beobachtung den Nullpunkt zu *erniedrigen* im Stande sei, und dass sich das Thermometer während der langen Zwischenzeit der Ruhe wieder „erholte“? Die Resultate scheinen diesen Schluss zu befürworten. Diese beiden eigenthümlichen Gesetzmässigkeiten, die den Zickzackverlauf des beobachteten Nullpunktes zu charakterisiren scheinen, waren mir nicht eher bekannt, als bis ich die Resultate in Fig. 8 aufzeichnete, lange nach Beendigung der Arbeit, und aus diesem Grunde hatte ich keine Gelegenheit die Folgerungen näher zu prüfen.

Die Reihe der Gefrierpunkte beweist, dass der *beobachtete* Nullpunkt des Thermometer durchaus nicht constant war: es ist dieser Umstand wohl zu beachten. Allerdings können wir annehmen, dass der Mangel an Constanz nur *scheinbar* ist, und sich durch experimentelle Fehler erklären lässt. Demgemäss würde der beobachtete Nullpunkt am 21. Januar als um $0,001^{\circ}$ C. zu hoch anzunehmen sein, und der am 25. Januar

als um ebenso viel zu niedrig. Aehnlich liegt die Sache am 30. Januar, am 4. März, und am 11. und 13. Februar, in welchen letzteren Fällen entgegengesetzte Fehler anzunehmen wären, die bis zu $0,0015^{\circ}$ C. betragen. (Vgl. 6. Februar.) Diese Fehler müssten als Fehler in den Erniedrigungen erscheinen, die von den unrichtigen Nullpunkten gemessen sind, und da wir anzunehmen hätten, dass sie sehr bedeutend sind, müssten wir grosse Unregelmässigkeiten in den Curven der Molecular-Erniedrigungen finden. Aber solche Unregelmässigkeiten fehlen meistens gänzlich. Eine genaue Analyse der Resultate in dieser Hinsicht ist nicht ohne Werth, und zu diesem Zweck wollen wir die einzelnen Erniedrigungen untersuchen, die an den Tagen, wo die vermutheten falschen Nullpunkte erhalten sind, gemessen werden.

21. Januar. Nullpunkt vermuthlich zu hoch.

Die an diesem Tage gemessenen Erniedrigungen waren BaCl_2 , $m = 0,01; 0,02; 0,05; 0,10; 0,20$. Die Annahme, dass der Nullpunkt zu hoch war, würde die Erniedrigungen in den verdünnten Lösungen zu gross machen. Die Curve scheint aber anzudeuten, dass sie zu gering sind.

25. Januar. Nullpunkt vermuthlich zu niedrig.

NH_4Cl , $m = 0,01$ wurde wieder untersucht, und das erhaltene Resultat war um $0,0005^{\circ}$ C. *höher* als der Mittelwerth auf der Tafel. Somit entspricht die Annahme, dass der Nullpunkt an diesem Tage zu niedrig war, nicht der Erniedrigungs-Beobachtung.

30. Januar. Nullpunkt vermuthlich zu niedrig.

Die untersuchten Lösungen waren: KNO_3 , $m = 0,01; 0,02; 0,05; 0,10; 0,20$. In diesem Falle entspricht die Annahme, dass der Nullpunkt unrichtig war, dem in der Curve erscheinenden Fehler.

4. Februar. Nullpunkt vermuthlich zu hoch.

Die ganze Reihe von Na_2CO_3 wurde beobachtet. Die Curve ist durchaus regelmässig, und dieser Umstand lässt keine Entscheidung darüber zu, ob der Nullpunkt zu hoch oder zu niedrig war, da eine völlig regelmässige Curve selbst bei einem Fehler im Nullpunkt sich ergeben würde, vorausgesetzt, dass *alle* Gefrierpunkte der Lösungen selbst

ohne Fehler, oder nur von constanten Fehlern beeinflusst sind.

11. Februar. Nullpunkt vermuthlich zu niedrig.

Beobachtet wurde MgCl_2 , $m = 0,15$ und $0,25$. An diesen Punkten ist die Curve etwas erniedrigt, und es ist ein möglicher Fehler anzunehmen, der mit der Annahme eines zu niedrigen Nullpunktes übereinstimmen würde.

13. Februar. Nullpunkt vermuthlich zu hoch.

MgCl_2 , $m = 0,30$ wurde beobachtet. Die Curve ist an dieser Stelle nicht „empfindlich“ genug, um die Beurtheilung eines möglichen Fehlers zu gestatten.

27. Februar. Nullpunkt vermuthlich zu niedrig.

KCl , $m = 0,035$ und NH_4Cl , $m = 0,035$ wurden beobachtet. Die Unregelmässigkeit der KCl -Curve würde indessen den entgegengesetzten Fehler im Nullpunkt andeuten.

4. März. Nullpunkt vermuthlich zu hoch.

Vollständige Reihe von K_2CO_3 . Hier, wie bei Na_2CO_3 , zeigt die Curve keine Unregelmässigkeiten. Vgl. die Bemerkungen für 4. Februar.

6. März. Nullpunkt vermuthlich zu niedrig.

Die beanstandeten Reihen KHO und NaHO , $m = 0,01$ und $0,02$ werden untersucht. Die Curven waren ohne Unregelmässigkeiten, und wurden nur beanstandet, wie oben bemerkt, weil das specifische Gewicht und das electriche Leitungsvermögen abnorm gefunden wurden.

13. März. Nullpunkt vermuthlich zu hoch.

NaNO_3 und NH_4NO_3 , $m = 0,01$; $0,02$ und $0,03$ werden beobachtet. Die Curven deuten auf keine Fehler an diesen Stellen.

20. März. Nullpunkt vermuthlich zu niedrig.

KNO_3 , $m = 0,025$, NaNO_3 , $m = 0,20$ und NH_4NO_3 , $m = 0,20$ werden beobachtet. Die beobachteten Gefrierpunkte der drei Curven sind völlig regelmässig und zeigen keine Fehler an.

25. März. Nullpunkt vermutlich zu hoch.

Vollständige Reihe von H_3PO_4 . Die Curve ist völlig regelmässig und deutet keinen Fehler an. Vgl. die Bemerkung für den 4. Februar.

Somit hat es den Anschein, dass die Annahme, dass die Nullpunkte an den Tagen, wo der auffallende Zickzack-Verlauf in der Curve der Nullpunkte erscheint, unrichtig *beobachtet* wurden, nicht genügt, um die beobachteten Veränderungen des Nullpunktes des Thermometer zu erklären, da in diesem Falle im allgemeinen die *entsprechenden* Fehler in den gemessenen Erniedrigungen erscheinen müssten. Wir müssen deshalb annehmen, dass das Thermometer selbst bedeutenden Aenderungen unterworfen ist, die zwar nicht *plötzlich* sind, wie ich in meiner früheren Arbeit vermuthete, aber immerhin noch derartig, dass beträchtliche Fehler möglich wären.

Während eine Vergleichung mit den Resultaten anderer Methoden, von denen einige neueren Datums sind, anzuzeigen scheint, dass bei der vorliegenden Methode die Fehler zum Mindesten wohl auf dieselben Grenzen, die von anderen Beobachtern erreicht werden, beschränkt sind, so glaube ich doch, dass eine rationelle Kritik der vorliegenden Resultate die Möglichkeit von experimentellen Fehlern, bisweilen bis zur Höhe von $0,001^{\circ}$ C. zulassen muss. Aus diesem Grunde habe ich es niemals für vortheilhaft gehalten, die Methode über die Verdünnung $m = 0,01$ hinaus anzuwenden, da in diesem Gebiet ein Fehler von $0,0001^{\circ}$ C. kritisch ist.

Bemerkungen über Willkür des Beobachters.

Es scheint mir nöthig, hinzuzufügen, dass keine Mühe gescheut werde, diese Fehlerquelle zu eliminiren. Während die Methode selbst schon es unmöglich zu machen scheint, dass die Willkür des Beobachters irdend einen Einfluss auf die Resultate haben sollte, so wurde doch noch die Vorsicht angewandt, in jedem Falle die üblichen fünf vollständigen Beobachtungen einer Reihe zu machen, bevor die Resultate auf Coordinaten-Papier gebracht wurden. Ferner wurde niemals irgend eine Vergleichung mit den Resultaten anderer Beobachter gemacht, ehe nicht die ganze Beobachtungsarbeit beendet war. Schliesslich wurden die sogenannten theoretischen Werthe erst berechnet, nachdem Monate seit der Beobachtungszeit verstrichen waren, nämlich erst zu der Zeit, als die Arbeit zur Publication fertig gestellt wurde.

Ich füge hinzu, dass ich, sobald es die Temperaturverhältnisse gestatten werden, die Beobachtungen fortzusetzen gedenke, und zwar sollen u. A. untersucht werden: KHO , NaHO , HNO_3 , eine Reihe von Phosphaten und organischen Verbindungen.

Physical Laboratory Princeton College, Princeton, N. J.
15. August 1895.

15. *Besprechung einiger Einwände,
die gegen meine Methode der Bestimmung des Gefrierpunktes verdünnter Lösungen erhoben wurden;
von E. H. Loomis.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 3—8.)

Die Beobachtungen über den Gefrierpunkt einiger verdünnter organischer Lösungen, die der Verfasser mittheilte, sind so durchaus verschieden von allen den von früheren Untersuchern erhaltenen Resultaten, dass verschiedene Fragen in dieser Hinsicht zu beantworten sind.

1. Hr. Jones¹⁾ hat vermuthet, dass der bedeutende Unterschied seiner Resultate von den meinigen vielleicht so zu erklären ist, dass ich unreines Material verwandte, besonders in den Fällen von Zucker und Phosphorsäure. Die letztere ist genügend im vorangehenden Aufsatz (p. 510) besprochen worden. Was den Zucker anbetrifft, so brauche ich nur anzugeben, dass allein *gut ausgebildete, durchsichtige* Krystalle von Candiszucker genommen wurden. Diese wurden sorgfältig ausgewählt, mit einem feinen Pinsel von Staub befreit, dann pulverisirt und über Schwefelsäure getrocknet. Die genau abgewogene Menge wurde dann in *kaltem* (4° C.) Wasser gelöst, und die Gefrierpunkte dann sobald als möglich bestimmt. Ich denke, derartiges Material kann man innerhalb der für die gegenwärtigen Methoden von Gefrierpunktsbestimmungen erforderlichen Reinheitsgrenzen getrost als gut ansehen.

Im allgemeinen muss ich bemerken, dass ich durchweg meine Hauptaufmerksamkeit mehr auf die Reducirung von experimentellen Fehlern im physikalischen Theil der Arbeit richtete, als von solchen im chemischen Theil, da ich überzeugt bin, dass die ersteren Fehler die grösste Schwierigkeit bildeten und noch bilden, neben denen die Frage nach der absoluten chemischen Reinheit des Materials kaum in Betracht kommen kann.

1) Jones, Wied. Ann. 53. p. 395.

2. Ist es möglich, dass irgend eine Fehlerquelle, die der von mir angewandten Methode eigenthümlich ist, dafür verantwortlich zu machen ist, dass meine Resultate gleichmässig niedriger sind, als die von allen früheren Autoren erhaltenen?

Meine fortgesetzte Anwendung der Methode liess mich keine derartigen experimentellen Fehler erkennen. Es ist eine interessante Thatsache, dass alle neueren Beobachtungen darin übereinstimmen, dass die alten Werthe für diese organischen Verbindungen merklich erniedrigt werden, und dass selbst einige derselben, besonders die von Nernst und Abegg¹⁾ und von Wildermann²⁾ in der Region mittlerer Concentration fast identisch mit den meinigen sind. Diese Uebereinstimmung ist noch auffallender, wenn wir auf die Tabelle blicken, die ich hier aus meiner früheren Arbeit³⁾ wiederhole. Sie enthält die Gefrierpunkte einer $\frac{1}{10}$ normalen Zuckerlösung, wie sie von den verschiedenen Autoren gefunden wurden, nebst dem Jahr der Publication und dem vermutheten Fehler der Beobachter.

In dieser Tabelle füge ich jetzt die von mir und den neueren Beobachtern erhaltenen Werthe hinzu.

Beobachter	Zeit der Veröffentlichung	Gefrierpunkt	Vermuthlicher Fehler
Raoult I	1886	0,240°	0,01—2°
Arrhenius I	1888	0,210	0,005
Traube	1891	0,235	0,005
Eykman	1891	0,216	—
Arrhenius II	1891	0,204	—
Tammann	1891	0,206	—
Pickering	1891	0,201	0,0005
Raoult II	1892	0,205	0,002
Loomis	1893	0,190	—
Jones ⁴⁾	1893	0,197 ⁴⁾	0,0001—2
Nernst u.A. ⁵⁾	1894	0,187 ⁵⁾	—
Wildermann ⁶⁾	1894	0,190 ⁶⁾	0,0001—2

1) Nernst u. Abegg, Zeitschr. f. phys. Chem. 4. p. 681. 1894.

2) Wildermann, l. c. 3. p. 337. 1894.

3) E. H. Loomis, Wied. Ann. 51. p. 500. 1894.

4) Graphische Interpolation. Mittel von zwei Reihen, die in dieser Region etwa 0,002° differiren.

5) Extrapolation. Mittel von drei Reihen, die so sehr in ihrer ganzen Natur differiren, dass die Extrapolation sehr unsicher ist.

6) Sehr geringe Extrapolation.

3. Hr. Wildermann hat betreffs der drei von mir untersuchten organischen Verbindungen die Vermuthung ausgesprochen, dass die mit der Zunahme der Concentration zunehmenden Molecularerniedrigungen einem experimentellen Fehler zuzuschreiben sind, der, wie er meint, den beobachteten Nullpunkt zu niedrig macht. Die Resultate gestatten kaum diese Annahme, da dieselbe nur dann Berechtigung haben kann, wenn eine Folge von constanten Differenzen zwischen den Gefrierpunkten von den aufeinander folgenden Lösungen $m = 0,01$, $m = 0,02$, $m = 0,03$ etc. bis $m = 0,20$ vorliegen würde. Diese Differenzen zeigen indessen bei Zucker eine nicht zu verkennende Zunahme von $0,0184$ bis $0,0206^\circ$, d. h. die Zufügung von jedem $\frac{1}{100}$ Grammmolecül zu der Lösung erniedrigt den Gefrierpunkt um einen stets wachsenden Betrag. Daraus haben wir zu folgern, dass die beobachtete Zunahme der Molecularerniedrigung ihren Grund nicht in einem Fehler in der Bestimmung des Nullpunktes des Thermometers haben kann. Das gilt auch für Alkohol und Harnstoff.

Ferner müsste ein derartiger Fehler ein constanter sein, da diese drei Verbindungen genau in derselben Weise untersucht wurden, wie alle anderen Verbindungen, deren Zahl jetzt einige zwanzig beträgt. Der Umstand, dass diese übrigen Resultate von einem solchen constanten Fehler frei zu sein scheinen, macht die obige Annahme zum mindesten unwahr. Auch ist es unmöglich, dass dieser vermuthete Fehler ein zufälliger sein sollte, der den zwei oder drei Bestimmungen des Nullpunktes, von dem die Erniedrigungen erhalten wurden, eigenthümlich sein könnte, da diese besonderen Erniedrigungen für Zucker und Alkohol von nicht weniger als vierzehn getrennt bestimmten Nullpunkten gemessen wurden, deren jede das Mittel von 7—9 gänzlich unabhängigen Beobachtungen war.

Es scheint mir nöthig zu sein, in dieser Beziehung meine Resultate mit denen der anderen Autoren zu vergleichen. Von den früheren Beobachtern haben Arrhenius und Tammann dieses der zunehmenden Concentration entsprechende Zunehmen der Molecularerniedrigungen gefunden, und von den neueren Beobachtern finden alle, ausser Hrn. Jones, dieselbe, auch von mir beobachtete Zunahme, so z. B. Nernst und Abegg¹⁾

1) Nernst u. Abegg, Zeitschr. f. phys. Chem. 4. p. 681. 1894.

für Zucker. Zwar differiren ihre drei getrennten Beobachtungsreihen sehr voneinander: eine zeigt *Zunahme* der Molecularerniedrigungen mit Zunahme der Concentration, die zweite Abnahme, und die dritte zeigt eine solche Unregelmässigkeit, dass man aus ihr in dieser Beziehung keinen Schluss ableiten kann; aber immerhin zeigen die *Mittelwerthe* der drei Reihen eine ausgesprochene *Zunahme*. Die Resultate von Jones weisen dieselbe Zunahme von dem Punkt $m = 0,10$ an auf, die von Raoult von dem Punkt $m = 0,16$, während bei Wildermann die Zunahme durch die *ganze* Reihe geht. Man vergleiche Fig. 6, Taf. IV, wo Wildermann's Resultate für Zucker durch die punktirten Linien dargestellt sind. Reihe I wurde mit einer „Eiskapsel“ um die Kugel des Thermometers gemacht, II ohne diese „Eiskapsel“, während III unter „noch günstigeren Umständen“¹⁾ gefunden wurde. Hr. Wildermann sieht II als correct innerhalb $0,0001-2^\circ$ an: alsdann müssen die in dieser bemerkenswerthen Reihe erscheinenden drei Thatsachen als endgültig angesehen werden, nämlich:

1. Es ist eine deutliche *Zunahme* der Molecularerniedrigungen von dem Werth 1,76 in den verdünnten Lösungen bis 1,89 in den concentrirtesten vorhanden.

2. Die Molecularerniedrigung erreicht diesen Werth *nur* in den concentrirtesten Lösungen, wo, wie Hr. Wildermann später mittheilt, der Werth keine Bedeutung haben kann.

3. Die Reihe zeigt bei diesem beobachteten höchsten Werth keine Tendenz, constant zu werden, da ein Blick auf die Curve in Fig. 6 es sofort klar macht, dass die Resultate die horizontale Linie constanter Molecularerniedrigung von 1,89 schneiden.

Nachdem Hr. Wildermann nun diesen Werth 1,89 erreicht hatte, brach er seine Untersuchungen ab.

Von dieser interessanten Reihe sagt er: „Der constante Werth (1,89) kommt sehr gut zum Vorschein.“

Da Hr. Wildermann ein ähnliches Zunehmen der Molecularerniedrigungen in Reihe I als durch die „Eiskapsel“ um die Thermometerkugel veranlasst erklärt, so wäre es sehr

1) Wildermann, Phil. Mag. 40. p. 126. 1895.

wünschenswerth, zu erfahren, aus welchem Grunde er dasselbe in Reihe II, wo die „Eiskapsel“ fehlte, unbeachtet lässt.

Obgleich diese Reihe II von Hrn. Wildermann für correct innerhalb $0,0001-2^{\circ}$ erklärt wird, so scheint sie für ihn doch nicht so beweisend zu sein, wie seine Discussion derselben vermuthen lässt, da er die Untersuchung „unter noch günstigeren Umständen“¹⁾ wiederholte. Das Resultat hiervon ist Reihe III. Diese letztere differirt von Reihe II in unregelmässiger Weise um etwa $0,001^{\circ}$, d. h. etwa um das fünffache des möglichen Fehlers der letzteren. Nimmt man nun an, dass diese Reihe III den äussersten Grad experimenteller Genauigkeit erreicht hat, so folgt daraus, glaube ich, dass Hr. Wildermann den experimentellen Fehler seiner früheren Untersuchungen unterschätzte.

Diese früher nicht erreichte Genauigkeit dieser letzten Reihe (III) macht sie besonders beachtenswerth (vgl. Fig. 6, Curve III), und zwar sind folgende Punkte hervorzuheben.

1. Die Reihe zeigt eine Variation von 1,84 bis 1,89.

2. Der Werth 1,89 wird sehr plötzlich von einer der fünf Beobachtungen erreicht; ihm gehen voraus zwei Beobachtungen, deren Werthe 1,84 sind, und es folgen ihm zwei, deren Mittelwerth ebenfalls ungefähr 1,84 ist.

Trotzdem sagt Hr. Wildermann von dieser Beobachtungsreihe²⁾: „So habe ich gezeigt, dass die Constante 1,89—7 sich in verdünnten Lösungen gut bewährt.“

Diesen Widerspruch zwischen Hrn. Wildermann's Resultaten und seiner Erläuterung derselben darf man bei Durchsicht seiner Arbeit nicht aus dem Gedächtniss verlieren:

So z. B. zeigen bei Alkohol (vgl. Fig. 7) seine „ohne Eiskapsel“ erhaltenen Resultate (Curve II) ein stetiges Anwachsen der Molecularerniedrigungen von 1,81 bis 1,85; die einzige Ausnahme befindet sich bei $m = 0,006527$. Hierüber sagt er nun³⁾: „Wir erhalten in allen Concentrationen den constanten Werth 1,84.“

Die dritte Reihe, „wiederholt unter noch günstigeren Umständen“, zeigt noch auffälliger dieselbe unverkennbare, mit der

1) Wildermann, Phil. Mag. 40. p. 126. 1895.

2) Wildermann, l. c.

3) Wildermann, Zeitschr. f. phys. Chem. 3. p. 342. 1894.

Concentration wachsende Zunahme der Molecularerniedrigungen. Ich halte es für überflüssig, diese detaillirte Prüfung auf den noch übrig bleibenden Fall von Harnstoff auszudehnen, wo dieselben Erscheinungen zu Tage treten.

Es dürfte sich aber der Mühe verlohnen, auf die auffallende Uebereinstimmung hinzuweisen, die besteht zwischen den von Hrn. Wildermann mit „Eiskapsel“ erhaltenen Resultaten mit den meinigen, für Zucker und Alkohol. Bei Alkohol (vgl. Fig. 7, Taf. IV, Curve I) ist diese Uebereinstimmung so genau, dass beide Reihen als identisch angesehen werden müssen, mit Ausnahme der kleinen Region grösster Verdünnung. Hr. Wildermann erklärt diese Uebereinstimmung damit, dass er behauptet, dass bei mir unzweifelhaft eine ähnliche „Eiskapsel“ um die Kugel des Thermometers vorhanden war. Aus meiner früheren Arbeit ist aber ersichtlich, dass die Bildung dieses Eislagers dort sorgfältig erwogen wurde, und man wird ferner bemerken, dass u. a. es ein Grund dafür war, die „Ueberkühlung“ auf die enge Grenze von $0,15$ bis $0,25^\circ$ zu beschränken, dass die Bildung dieser störenden Eislager unmöglich werden sollte. Und in der That bildete sich bei mir niemals auch nur eine *Spur* von Eis, weder an der Thermometerkugel noch an der Wand des Gefriergefässes.

Diese bemerkenswerthe Uebereinstimmung ist um so schwieriger zu erklären, als Hr. Wildermann meine Resultate als „blos qualitative“ betrachtet und ferner behauptet, dass die Concentrationen der verschiedenen Lösung unrichtig bestimmt seien.

4. Ist es nicht möglich, dass ein derartiger constanter Fehler, wie unter 3. besprochen, dafür verantwortlich zu machen ist, dass bei den drei von mir untersuchten Nichtelectrolyten die „Curven“ der Molecularerniedrigungen, die in dem grössten Theil ihres Verlaufes sich so wenig von geraden Linien unterscheiden, alle gleichmässig in der Region starker Verdünnung ein Herabbiegen zeigen?

Ich glaube, die Resultate lassen noch keine definitive Antwort auf diese Frage zu. Um die „Curve“ in ihrer ganzen Länge zu einer geraden Linie zu machen, braucht man durchaus keinen grossen Beobachtungsfehler anzunehmen, und es dürfte sich wohl empfehlen, diese Frage noch als schwebend

anzusehen. Dass ein derartiger Fehler durchaus nicht unwahrscheinlich ist, erhellt aus der Thatsache, dass bei denjenigen Electrolyten, die in der Region extremer Verdünnung mit Fehlern behaftet zu sein scheinen, bei den Curven eine ähnliche Tendenz, nach unten sich zu biegen, hervortritt (BaCl_2 , HCl , NH_4Cl). Den Umstand, dass Wildermann's Resultate dieselbe Eigenthümlichkeit aufweisen, darf man nicht als eine Bestätigung meiner Resultate ansehen.

5. Es bleibt noch eine sehr wichtige Frage. -

Welches sind die bez. Vortheile, die man bei Gebrauch eines Thermometers hat, das in $\frac{1}{1000}$ Grad getheilt ist, und eines anderen, das in $\frac{1}{100}$ Grad getheilt ist?

Diese Frage kann ich nur auf der Grundlage discutiren, die mir meine eigene Arbeit mit einem $\frac{1}{100}$ Grad Thermometer lieferte, und die mir die publicirten Resultate anderer Autoren geben, welche mit $\frac{1}{1000}$ Grad Thermometern arbeiteten.

Zunächst muss ich ganz entschieden betonen, dass das $\frac{1}{100}$ Grad Thermometer leicht bis zu den Zehntausendtheilen eines Grades *abgelesen* werden kann, mit einem möglichen Fehler, der die Hälfte dieser Zahl beträgt. Genügender Beweis hierfür ist die Thatsache, dass ich oftmals eine Beobachtungsreihe unterbrach, um einen zufällig anwesenden Studenten für mich die Ablesung machen zu lassen. In *keinem Falle* unterschieden sich solche Ablesungen von den meinigen um mehr als $\frac{1}{10000}$ Grad. Das ist aber auch durchaus nicht auffallend, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die Micrometerscala des Mikroskops den Beobachter in Stand setzt, die Tausendtheile direct abzulesen, und die *Zehntausendtheile* so genau abzuschätzen, wie die Zehntel eines Millimeters an einer gewöhnlichen Millimeterscala.

Wie lässt sich alsdann die Thatsache erklären, dass eine Reihe von fünf unabhängigen Bestimmungen eines gegebenen Gefrierpunktes im Durchschnitt etwa um $0,001^\circ$ variiren? Es ist das erstens entweder auf eine *Inconstanz* des Thermometers selbst zurückzuführen, oder zweitens auf eine Mangelhaftigkeit in der Methode, die es nicht vermag, die Lösung innerhalb dieser Genauigkeitsgrenzen auf den wirklichen Gefrierpunkt zu bringen. Während es im Princip nicht unmöglich erscheint, dass die erstgenannte Ursache bisweilen mitspielt, so deutet doch eine

sorgfältige Untersuchung dieses Punktes¹⁾ auf das Gegentheil hin. Ich denke, es wird sich leicht nachweisen lassen, dass die zweite Ursache ganz besonders zu beachten ist, und dass sie die *hauptsächliche Schwierigkeit* bei allen Gefrierpunktsbestimmungen bildet.

Um z. B. die von Hrn. Jones²⁾ erhaltenen Resultate anzuführen, so scheint die grosse Genauigkeit, mit der er sein $\frac{1}{1000}$ Grad Thermometer *ablesen* konnte, zusammen mit einigen wenigen vorläufigen Beobachtungen, ihn dazu veranlasst zu haben, seinen *experimentellen* Fehler auf $0,0001-2^{\circ}$ festzustellen. Sicherlich ist der *Ablesungsfehler* sogar noch kleiner. Durch die ganzen *Resultate* von Hrn. Jones hindurch wird es jedoch klar, dass seine *Methode* nicht im Stande war, die Lösungen innerhalb dieser geschätzten Genauigkeit auf ihre Gefrierpunkte zu bringen, da in *jedem* Fall, wo uns Hr. Jones zwei Beobachtungsreihen mittheilt, die correspondirenden Beobachtungen einer und derselben Lösung oft um $\frac{1}{1000}$ Grad und nicht selten um das doppelte und dreifache dieses Betrages differiren. Diese auffallenden Abweichungen treten ganz allgemein in seinen beiden Reihen von K_2SO_4 und der von $BaCl_2$ zu Tage. Man vgl. Fig. 3 und 4.

Aus diesem Umstande, dass die Methode in der Hauptsache fehlerhaft ist, nämlich darin, die Lösungen bis zu einer Genauigkeit von $0,001-3^{\circ}$ auf ihren Gefrierpunkt zu bringen, dürfte es sich wohl ergeben, dass die Methode durch die Anwendung eines Thermometers, das bis $\frac{1}{10000}$ Grad abgelesen werden kann, wenig gewinnen kann. Hr. Jones scheint selbst sich der Mängel seiner Methode in diesem Punkte bewusst gewesen zu sein: es geht dies mit ziemlicher Sicherheit daraus hervor, dass er ausdrücklich auf die *Regelmässigkeit* in der Abnahme der Molecularerniedrigungen hinweist, die sich bei seinen Resultaten für HCl zeigt.³⁾ Man vgl. Fig. 3f für die graphische Darstellung seiner Resultate. Dass eine solche „Curve“ von Hrn. Jones als *regelmässig* angesehen wird, zeigt an, dass er der Ansicht war, dass seine

1) Vgl. p. 527.

2) Jones, Zeitschr. f. phys. Chem. 1893—1894.

3) Jones, l. c. 12. p. 628. 1893.

Methode leicht experimentelle Fehler bis zu mehreren Tausendtheilen eines Grades zulässt. Auf Hrn. Jones' Bekanntschaft mit dieser Thatsache brauchen wir jedoch nicht nur zu *schliessen*, sondern er bestätigt dieselbe selbst dadurch, dass er von seinen Resultaten für Na_2CO_3 sagt¹⁾: „Die scheinbare Unregelmässigkeit rührt ohne Zweifel von einem geringen Versuchsfehler her.“ Man vergleiche die graphische Darstellung seiner Resultate für Na_2CO_3 in Fig. 3. Hier tritt hervor, dass der geringe Versuchsfehler fast bis zu einem Hundertstel eines Grades ansteigt. Der Umstand, dass Hr. Jones hierauf als auf einen geringen Fehler Bezug nimmt, zeigt, wie vollständig er sich der gänzlichen Unzuverlässigkeit seiner Methode in dem hier besprochenen Resultate bewusst war.

Was für seine Na_2CO_3 -Reihe gilt, erscheint auch bei seinen späteren Resultaten, besonders bei H_2SO_4 , Zucker, BaCl_2 , K_2CO_3 etc. Die Curven für die beiden letzteren sind in Fig. 3 und 4 gegeben.

Unter diesen Umständen kann man kaum einsehen, was für ein besonderer Vortheil aus der Anwendung eines $\frac{1}{1000}$ Grad Thermometer entsprang, oder mit welchen Gründen Hr. Jones die Versuche rechtfertigen will, die Molecularerniedrigungen von Lösungen in den extremen Verdünnungen $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{1000}$ normal zu messen, wo ein experimenteller Fehler von 0,0001—2⁰ absolut *fatal* ist.

Der einzige sonstige Beobachter, der, soweit mir bekannt, ein $\frac{1}{1000}$ Grad Thermometer benutzte, ist Hr. Wildermann in seiner von Hrn. Lewis entnommenen Methode. Dass diese Methode in derselben fundamentalen Anforderung mangelhaft ist, die Lösung auf ihren wirklichen Gefrierpunkt zu bringen, geht aus einer ähnlichen Prüfung der beiden Reihen von Resultaten hervor, die er für Zucker und Alkohol gegeben hat. In jedem dieser Fälle ist nach Hrn. Wildermann Reihe II mit einem möglichen Fehler von 1—3 Zehntausendtheilen eines Grades behaftet, und er betrachtet die Reihe III als erhalten unter „noch günstigeren Umständen.“

1) Jones, l. c. p. 638.

Von den Differenzen, die diese zwei Reihen für Zucker darbieten, mögen folgende hervorgehoben werden:

$$\begin{aligned}\text{Bei } m &= 0,01, & 0,0008^\circ \\ m &= 0,02, & 0,0004 \\ m &= 0,03, & 0,0006\end{aligned}$$

Bei den Reihen für Alkohol finden wir folgende:

$$\begin{aligned}\text{Bei } m &= 0,01, & 0,0004^\circ \\ m &= 0,02, & 0,0008 \\ m &= 0,05, & 0,0010 \\ m &= 0,09, & 0,0027^1)\end{aligned}$$

Leider veröffentlicht er keine „wiederholte“ Reihe für Harnstoff.²⁾

Wir sind indessen schon durch die vorliegenden Angaben in Stand gesetzt, zu schliessen, dass sein auf 0,0001—2° geschätzter experimenteller Fehler thatsächlich etwa zehnfach zu klein ist, um seine Resultate zu erklären.

Ich vermag diese grossen Differenzen nur in der Weise zu erklären, dass ich annehme, dass die Methode nicht im Stande war, die verschiedenen Lösungen bis auf 1—2 Tausendtheile eines Grades genau auf den wirklichen Gefrierpunkt zu bringen. Diese grosse Unregelmässigkeit seiner Resultate dürfte Hr. Wildermann wohl selbst in dieser Weise erklären: und doch *liest* er sein Thermometer bis zu den Zehntausendtheilen eines Grades, und um *Ablesungsfehler* zu vermeiden, macht er 5—10 Beobachtungen. Das ist um so überraschender, wenn man sich erinnert, dass bekanntlich das Quecksilber in diesen feinen Thermometern, wenn es einmal in der Capillare zur Ruhe gekommen ist, so lange stehen bleibt, als die Kugel nur geringe Aenderungen der Temperatur (etwa Tausendtheile eines Grades) erfährt und das Thermometer nicht kräftig *geschüttelt* wird. Trotz alledem glaubt Hr. Wildermann, dass er dadurch, dass er sein Thermometer zu einer constanten

1) Um die wirkliche Differenz der beiden beobachteten Gefrierpunkte zu erhalten, muss man die in den Curven gegebene Differenz mit der correspondirenden Abscisse oder dem Werthe von m multipliciren.

2) Jones, Phil. Mag. 40. p. 126. 1895.

Ableseung gebracht hat, auch seine Lösung zu einer constanten Temperatur gebracht habe.

Wie erklärt nun Hr. Wildermann die Thatsache, dass sein $\frac{1}{100}$ Grad Thermometer, das neben sein $\frac{1}{1000}$ Grad Instrument gestellt wurde, Variationen von einigen (1—3) Tausendtheilen zeigte? Er sagt uns, das seien Ablesungsfehler. Ist es vielleicht nicht möglich, dass die Variationen nicht ausschliesslich auf Ablesungsfehler zurückzuführen sind, sondern dass sie von thatsächlichen Aenderungen des Quecksilbers herrühren können? Gerade das $\frac{1}{100}$ Grad Thermometer mit seiner kleinen Kugel ist vielleicht im Stande, solche Temperaturveränderungen in den Lösungen anzuzeigen, die bei Gebrauch des $\frac{1}{1000}$ Grad Thermometers, mit einigen 300 g Quecksilber in der Kugel, ganz verloren gehen können.

Ich glaube somit, dass eine sorgfältige Prüfung der mit einem $\frac{1}{1000}$ Grad Thermometer erhaltenen Resultate uns zu dem Schlusse zwingt, dass die Anwendung eines solchen bislang nichts zur Erhöhung der Genauigkeit der bisher angewandten Methoden beigetragen hat und dass sie ferner darauf hinweist, grössere Genauigkeit in der Richtung anzustreben, eine genauere Controlle über die Temperatur der Lösungen selbst zu erhalten.

Zum Schluss mögen noch einige Punkte hervorgehoben werden, die sich mir durch lange Praxis als beachtenswerth ergeben haben.

1. Es kann nicht stark genug betont werden, dass die Ableseung des Thermometers, welches auch immer die Methode ist, *niemals* gemacht werden soll, bevor nicht alle Manipulationen mit der Lösung beendet sind.

2. Der experimentelle Fehler einer Methode kann ziemlich sicher geschätzt werden, indem man eine Reihe von gänzlich unabhängigen Bestimmungen des Gefrierpunktes von *Wasser* macht. Diese sollen an einem Tage, wo das Barometer möglichst constant ist, gemacht werden, und besondere Aufmerksamkeit sollte auf die unter 1. genannte Vorsicht verwendet werden.

3. Wichtig erscheint es, alle diese beobachteten Nullpunkte des Thermometers sorgfältig nebst den Tagen der Beobachtung

aufzuzeichnen. Die sehr grosse Variation, $0,008^1$), des scheinbaren Nullpunktes von Wildermann's $\frac{1}{1000}$ Grad Thermometer, die sich in seiner kurzen Beobachtungsperiode ergab, wird auf diese Weise, wenn sie systematisch studirt wird, vielleicht zu einigen werthvollen Schlüssen führen.

Da Hrn. Wildermann's Kritik meiner Arbeit hauptsächlich auf unrichtiger Wiedergabe der Thatsachen beruht, so erscheint es mir überflüssig, näher auf dieselbe einzugehen.

1) Das Maximum findet man auf p. 339, Zeitschr. f. phys. Chem. 3. 1894, wo der dritte beobachtete Nullpunkt $0,4873$ ist, was, auf 760 mm reducirt, $0,4884$ wird. Das Minimum findet man auf p. 362, wo der Nullpunkt $0,4781$, oder, auf 760 mm reducirt, $0,4804$ ist.

16. *Innerer Bau*
und optisches Verhalten der Lippmann'schen
Photographien in natürlichen Farben;
von F. Schütt.

Als Lippmann vor einem halben Jahrzehnt zum ersten Mal fixirbare Photographien in natürlichen Farben auf Gelatineplatten herstellte, zögerte er nicht, die Farben derselben als Interferenzfarben anzusprechen, welche ihren Ursprung der lamellaren Structur der Schicht verdankten. Später¹⁾ gab er in mathematischer Form die Begründung, weshalb das von einer so beschaffenen Schicht reflectirte Licht nur Strahlen von derselben (oder nahe derselben) Wellenlänge enthalten könne, wie das, mit welchem die Schicht belichtet wurde. Diese Theorie, welche in ihren Grundzügen bereits von Zenker in seinem Lehrbuche der Photochromie entwickelt worden war, ist nebst der ebengenannten Schlussfolgerung bisher von allen Nachfolgern Lippmann's auf dem Gebiete der Photochromie, wie Gebr. Lumière, Krone, Valenta u. A. anerkannt worden. Erst Neuhauss²⁾, welcher in den nach Lippmann'schem Verfahren hergestellten Photochromien das Vorhandensein einer deutlichen Körnung erkannte, gelangte durch Messung der Grösse der einzelnen Körner zu dem Schlusse, dass neben den letzteren eine noch viel feinere und dennoch regelmässige Schichtung nicht wohl denkbar sei. Obgleich dieser Einwand gegen die Grundlage der Zenker-Lippmann'schen Theorie in einer neuerdings erschienenen Abhandlung von O. Wiener³⁾ für nicht stichhaltig erklärt wurde, scheinen die erhobenen Zweifel doch einer weiteren

1) Lippmann, Journ. de phys. (3) 3. p. 97. 1894; Niewenglowsky, Jahrb. f. Photogr. 8. p. 73, 1894.

2) Neuhauss, Photogr. Rundschau 8. p. 295. 1894.

3) O. Wiener, Wied. Ann. 55. p. 225. 1895.

Prüfung bedürftig zu sein, da schon Meslin¹⁾ darauf hinwies, dass von den Photographien des Spectrums keineswegs nur einfache Farben reflectirt werden und auch Lippmann von der Richtigkeit seiner Schlussfolgerung bisher den experimentellen Beweis nicht erbracht hat.

Auf Grund der älteren und einiger neuer Beobachtungen an Photochromien soll im Folgenden eine Klarstellung dieser für die Farbenphotographie wichtigen Punkte versucht werden.

Als Probeobjecte dienen Photochromien des Sonnenspectrums, welche nach den Vorschriften von Lippmann und Valenta²⁾ hergestellt worden waren und von denen namentlich eine dem Verf. von Hrn. Neuhauss gütigst überlassene Platte die Spectralfarben mit ausserordentlicher Kraft wiedergab.

1. Verhalten der Photochromien im auffallenden Licht.

Die Erscheinungen, welche bei der Reflexion des weissen Lichtes beobachtet werden können, sind folgende:

a) Jede einzelne Farbe des Spectrums ist nur dann wahrnehmbar, wenn die Oberfläche der Gelatineschicht das Bild einer Lichtquelle zurückspiegelt. Das farbig zurückgeworfene Licht ist dem Reflexionsgesetz streng unterworfen. Diffuse Zerstreuung des farbigen Lichtes findet nicht statt.

b) Alle Richtungen auf der Oberfläche der Gelatineschicht sind gleichwerthig, d. h. es ändert sich an den sichtbaren Farben [nicht das Geringste, wenn man die Platte um die Normale zur Oberfläche dreht, sofern nur der Einfallswinkel des Lichtes unverändert bleibt.

c) Lässt man das Licht nicht senkrecht, sondern schräg von einer Photochromie reflectiren, so gehen sämmtliche Farben in die nächstfolgenden mit kürzerer Wellenlänge über. Sie verhalten sich also qualitativ ebenso, wie unter gleichen Bedingungen die Farben der Newton'schen Farbenringe.

d) Von der Rückseite der Schicht werden die gleichen Farben an der nämlichen Stelle, nur etwas matter, zurückgeworfen.

1) Meslin, Ann. chim. phys. (6) 27. p. 369. 1892.

2) Valenta, Die Photographie in natürlichen Farben. Halle, 1894.

2. Verhalten der Photochromien im durchgehenden Licht.

a) Die im reflectirten Lichte sichtbaren Farben sind im durchfallenden Lichte verschwunden oder äusserst schwach durch die zu ihnen complementären Farben ersetzt.

b) Das Spectroskop zeigt, dass die Strahlen kürzerer Wellenlänge bis zu etwa $500\ \mu\mu$ hinauf beim Durchgang durch die Schicht eine Absorption erleiden, infolge deren das ganze Spectrum einen röthlichen Ton annimmt.

3. Folgerungen.

Aus diesem Verhalten der Photochromien können bereits folgende Schlüsse auf die Natur und Entstehung ihrer Farben gezogen werden:

a) Die im weissen Lichte auftretenden Farben sind zweifellos Interferenzfarben. Denn wären sie Absorptionsfarben (etwa durch gefärbte Silberverbindungen hervorgebracht), so würden α) die Farben nicht nur bei einer ganz bestimmten Stellung der Gelatineoberfläche gegen die Lichtquelle sichtbar sein, sondern es müsste auch diffuse Zerstreuung derselben eintreten. β) Die Farben würden im durchgehenden Lichte erhalten bleiben, keinesfalls aber durch die zu ihnen complementären ersetzt sein, man müsste denn fluorescirende Farbstoffe annehmen wollen. γ) Im schräg auffallenden und reflectirten Lichte könnte keine Veränderung der Farben eintreten.

b) Die Interferenzfarben kommen nicht durch eine feine Zertheilung (Strichelung, Punktirung etc.) der Gelatineoberfläche zu Stande, denn in diesem Falle könnte α) der farbige Widerschein nicht streng dem Reflexionsgesetz unterworfen sein derart, dass er stets mit dem Spiegelbilde der Lichtquelle zugleich sichtbar wäre. β) Würden nicht alle Richtungen der Oberfläche vollkommen gleichwerthig sein. γ) Würden die Farben gegen eine Aenderung des Einfallswinkels des Lichtes viel empfindlicher sein und periodisch ihre Helligkeit wechseln.

c) Sämmtliche beobachteten Eigenschaften sprechen dafür, dass die Interferenzfarben diejenigen dünner, übereinandergelegter Blättchen sind. Im besonderen wird dies erwiesen:

α) Durch den Uebergang sämmtlicher Farben in die nächstfolgenden mit kürzerer Wellenlänge bei schräger Reflexion

des Lichtes. Gerade dieses Verhalten kommt den Farben dünner Blättchen zu, worauf ausser Lippmann auch Zenker¹⁾ und Meslin²⁾ aufmerksam gemacht haben.

β) Durch den Uebergang sämtlicher Farben in die vorhergehenden mit grösserer Wellenlänge, wenn die Dicke der Gelatineschicht vergrössert wird. — Dies lässt sich am besten dadurch bewirken, dass man die Photochromie in ein verschliessbares Glasgefäss hineinbringt, in welchem die Luft allmählich mit Feuchtigkeit gesättigt wird. Da die Gelatine hierbei allein in ihrer Dicke eine Zunahme erfährt, beweist die Veränderung der Farben in der genannten Weise, dass dieselben thatsächlich von dem verticalen Abstand der verschiedenen übereinanderliegenden Ebenen in der Gelatineschicht abhängig sind, dass diesen verschiedenen Ebenen demzufolge auch eine optisch verschiedene Beschaffenheit zukommt.

4. Der innere Bau der Photochromien.

Durch das optische Verhalten der Photographien in natürlichen Farben ist also die Anwesenheit dünner Lamellen, wie sie die Zenker-Lippmann'sche Theorie voraussetzt, höchst wahrscheinlich gemacht, und es bleibt zu prüfen, ob das nachweislich vorhandene Silberkorn, dessen Grösse den Abstand der hypothetischen Lamellen voneinander um ein Mehrfaches übertrifft, mit einer solchen Annahme vereinbar ist.

Zu diesem Zwecke verschaffte ich mir zunächst einen genaueren Einblick in die Natur dieses Kornes. Es war bei einer 71fachen Vergrösserung mit dem Trockensystem *AA* von Zeiss bereits als eine feine Punktirung der Schicht bemerkbar. Bei stärkeren Vergrösserungen zeigte sich, dass nicht die Undurchsichtigkeit, sondern das von dem der Gelatine verschiedene Lichtbrechungsvermögen des Kornes die Sichtbarkeit desselben bedingte, indem ähnlich wie bei ungefärbten Bakterien nur die Grenzen sich deutlich von der Umgebung abhoben und die Sichtbarkeit bei Anwendung grosser Blenden im Beleuchtungsapparat bedeutend abnahm.

1) Zenker, *Jahrb. f. Photogr.* 7. p. 114—121. 1893.

2) Meslin, *Ann. chim. phys.* (6) 27. p. 369. 1892.

Ein Zweifel daran, dass es sich wirklich um ein Silberkorn im Innern der Schicht und nicht um eine Körnung der Gelatineoberfläche handelte, konnte nicht bestehen, indem das Korn stets da am dichtesten erschien, wo die Platte am meisten der Lichtwirkung ausgesetzt war, während ausserhalb des Spectrums und an den Stellen, wo ein Staubbädchen die Gelatine vor der Einwirkung des Lichtes geschützt hatte, die Zahl der Körnchen sofort auf ein Minimum herabsank.¹⁾ Um nun festzustellen, wieviel Kornschichten wohl in der Gelatine übereinanderliegen mochten, maass ich vermittelst eines Ocular- und Objectivmikrometers die Grösse einzelner Körner bei 320- bis 720facher Vergrösserung und fand dieselbe in naher Uebereinstimmung mit Neuhauss zu 0,0006—0,0013 mm; die bei weitem grösste Menge der Körner schien zwischen 0,0007 und 0,0009 mm Durchmesser zu haben.

Hierauf suchte ich die Dicke der Gelatineschicht einiger Photochromien zu bestimmen, über welche bisher merkwürdigerweise keine genaueren Angaben gemacht worden sind. Die Messung dieser Grösse bot insofern Schwierigkeiten, als die kleinste, an der Mikrometerschraube noch mit Sicherheit ablesbare senkrechte Verschiebung des Mikroskops von 0,0025 mm die Dicke der Gelatineschicht augenscheinlich um ein Beträchtliches übertraf. Nach einigen vergeblichen Versuchen gelang es indessen, ganz feine Streifen von der Gelatine abzulösen, welche sich sofort zusammenrollten und aufrecht stehend unter Anwendung blauen Lichtes eine annähernde Messung ihrer Dicke zulassen. Dieselbe betrug nicht mehr, aber auch wahrscheinlich nicht viel weniger als 0,0012 mm. Wir haben somit das überraschende Resultat zu verzeichnen, dass die Dicke der Gelatineschicht nicht grösser war, als der Durchmesser der in ihr vertheilten Silberkörnchen!

Von einer Lamellenbildung durch diesen Silberniederschlag kann demnach überhaupt nicht die Rede sein, wohl aber von einer Lamellenbildung in demselben.

Bekanntlich gelingt es nicht nur auf Bromsilbergelatineplatten, Farben zu reproduciren, sondern auch festes Jod-, Brom-

1) Neuhauss hat l. c. diesen Einwand noch auf andere Weise widerlegt.

und Chlorsilber, ferner Bichromatgelatine, ja selbst ganz gewöhnliche Gelatine zeigen, in entsprechender Weise belichtet, mehr oder minder kräftig die wirksam gewesenen Farben. Da unsere Bromsilberemulsion nichts weiter vorstellt, als ein Gemenge solcher lichtempfindlichen Substanzen, ist es leicht verständlich, dass durch die Wirkung der stehenden Lichtwellen sich ebensowohl in der Gelatine, als in den darin enthaltenen Bromsilberkörnern Lamellen bilden müssen. Man darf nicht vergessen, dass die Körner Moleclaggragate vorstellen, denen trotz ihrer Kleinheit immer noch etwa ein 10,000—100,000 mal grösserer Durchmesser zukommt, als einem einzelnen Molecül. Da diese Aggregate sich erst in der Gelatine bildeten, kann man erfahrungsgemäss annehmen, dass sie von genügenden Mengen Gelatine durchsetzt sind, um nach dem Ausfixiren der nicht vom Lichte veränderten Bromsilbermolecüle ihre ursprüngliche Form zu bewahren. Die Gelatine dient gewissermassen als lichtdurchlässiges Bindemittel, und ohne ihre Anwesenheit würde ein Fixiren der natürlichen Farben nicht möglich sein.

Ist diese Ansicht richtig, so muss in den Räumen zwischen den Silberkörnern die farbige Reflexion weniger kräftig ausfallen, als auf den Körnern selbst.

Ich prüfte daraufhin eine Photochromie des Sonnenspectrums bei starker Vergrösserung in nahezu (theilweise sogar völlig) senkrecht reflectirtem Lichte, welches vermittelt eines total reflectirenden Prismas durch das Ocular des Mikroskops auf das Object geworfen wurde. Es zeigte sich dabei allerdings nicht die erwartete Erscheinung von feinen farbigen Pünktchen auf dunklerem Grunde, sondern eine sehr feine zweifarbige Körnung oder Sprenkelung der Schicht, welche so deutlich war, dass sie jedem unbefangenen Beobachter sofort auffiel. Obgleich dieses Verhalten der Schicht im reflectirten Lichte nicht der Erwartung entsprach, kann es dennoch als eine Bestätigung der eben ausgesprochenen Ansicht über die Lamellenbildung gelten, indem sich naturgemäss die vom Korne eingenommenen Stellen beim Entwickeln, Fixiren und namentlich beim Trocknen der Platte etwas anders verhalten werden als die silberfreien, oder doch silberarmen, dazwischen liegenden Theile. Die Folge davon muss sein, dass die Lamellen

nicht überall gleiche Beschaffenheit und genau gleiche Abstände besitzen, mithin auch nicht die gleichen Farben reflectiren. Namentlich im Blau und Violett des Spectrums trat deutlich ein in die Grundfarbe eingestreutes Roth auf. Leider liess sich ein directer Zusammenhang zwischen diesem Roth und dem Korne der Platte nicht feststellen, da das eine nur im reflectirten, das andere nur im durchgelassenen Lichte sichtbar war.

Wir begnügen uns deshalb, festgestellt zu haben, dass farbige Reflexion im weissen Lichte auch an denjenigen Stellen der Schicht stattfindet, welche vom Silberkorn eingenommen sind, und sehen darin eine Bestätigung der Ansicht, dass auch innerhalb des Kornes Lamellenbildung eintreten kann.

Aber auch über den Bau der Lamellen lassen sich Aufschlüsse erlangen.

Vielfach wird noch an der, zuerst von Zenker für Schichten anderer Art aufgestellten Hypothese festgehalten, dass die Gelatineschicht von parallelen, spiegelnden Silberlamellen im Abstände von einer halben Wellenlänge des wirksam gewesenen Lichtes durchzogen ist, deren Dicke gegenüber der Wellenlänge des Lichtes als sehr klein angesehen werden kann. Auch G. Meslin¹⁾ spricht sich p. 373 in ähnlicher Weise aus: „... nous pouvons conclure . . . que la décomposition chimique, qui s'est produite au voisinage des plans ventraux, a déposé aux environs de ces plans des granules d'argent, sur lesquels la réflexion de la lumière se produira.“ — Wenn hier die Dicke der Silberlamellen auch nicht gleich Null gesetzt wird, so geht doch aus den weiteren Ausführungen hervor, dass eine reflectirende Wirkung nur ihrer Oberfläche zugeschrieben wird.

Diese Auffassung wird durch folgende Thatfachen widerlegt:

1. Jede einzelne Lamelle ist als hochgradig durchsichtig zu betrachten, da selbst ihre Gesamtheit das durchgehende Licht nur wenig abschwächt. Eine durchsichtige Lamelle zwischen zwei gleichartigen Medien reflectirt aber nahezu gleich viel Licht an ihrer Ober- wie Unterfläche, nur in beiden Fällen

1) G. Meslin, Ann. chim. phys. (6) 27. p. 369. 1892.

mit entgegengesetzter Schwingungsrichtung, sodass, wenn ihre Dicke verschwindend klein ist, alles reflectirte Licht durch Interferenz vernichtet wird. Solche Lamellen können also überhaupt kein Licht zurückwerfen, es sei denn, dass schon die Oberfläche den grössten Theil des auffallenden Lichtes reflectirt, dann haben wir es aber nicht mit hochgradig durchsichtigen Lamellen zu thun. Aus demselben Grunde ist auch der mittlere Theil der von den Newton'schen Farbenringen eingenommenen Kreisfläche dunkel, sobald die Dicke der zwischen beiden durchsichtigen Medien eingeschlossenen andersartigen Schicht kleiner wird, als etwa der achte Theil der Wellenlänge des auffallenden Lichtes.

2. Die Lichtwirkung, der die Lamellen ihre Entstehung verdanken, ist streng genommen nur in denjenigen Ebenen, in denen die Schwingungsknoten der stehenden Lichtwellen liegen, gleich Null. Es ist daher nicht denkbar, dass nur gerade in den Maximis der Lichtwirkung eine Reduction des Silbersalzes stattfinden soll und unmittelbar daneben nicht mehr, obgleich doch schon bei beträchtlicher Unterexposition die Reduction in den Maximis beginnt. Eher wäre es denkbar, dass die Silberabscheidung *überall, ausser* in den Knotenebenen, stattfindet.

3. Endlich kann überhaupt nicht von einer zusammenhängenden Silberschicht gesprochen werden, das lehrt das Verhalten der Photochromien bei starker Feuchtigkeitsaufnahme. Wie wir bereits sahen, gehen dabei die Farben zuerst in die vorhergehenden mit grösserer Wellenlänge über, wie es die folgende Tabelle anzeigt:

Tabelle 1.

Ursprüngliche Farben		Grün	Roth	Gelb	Grün	Blau	Purpur	Grün
Abgeänderte Farben	1.	Grün	Purpurroth	Roth	Gelb	Grün	Blau	Purpur
	2.	Roth	Grün	Purpur	Roth	Gelb	Grün	Blau
	3.	Roth	Gelb	Grün	Grün	Roth	Orange	Grün
	4.	Rothbraun	Roth	Roth	Gelb	Grün	Roth	Roth
	5.	Rothbraun	Grün	Grün	Roth	Roth	Grün	Grün

Dann aber beginnt der metallische Glanz, welcher die Farben der Photochromien auszeichnet, zu verblassen und schliesslich ist der Lichtreflex von dem einer gewöhnlichen, durchsichtigen Gelatineschicht nicht mehr zu unterscheiden. Da eine wirkliche Silberlamelle durch Feuchtigkeit nicht verändert wird, können auch die übereinander liegenden Lamellen in der Photochromie durch blosses Dickerwerden der dazwischen gelagerten Gelatineschichten ihr Reflexionsvermögen nicht einbüssen.

Auch Lippmann hat die oben wiedergegebene Ansicht im gleichen Sinne modificirt. In einer neueren Arbeit¹⁾, in welcher das Zustandekommen der Farben bei der Reflexion einer mathematischen Behandlung unterworfen wird, geht er von der Hypothese aus, dass in einer homogenen, optisch unveränderten Gelatineschicht lichtreflectirende Molecüle nach einem bestimmten Gesetze periodisch vertheilt sind. Aber auch in dieser Form ist die Hypothese anfechtbar, indem einerseits die Homogenität der Gelatine nach der Einwirkung der stehenden Lichtwellen schwer aufrecht zu erhalten ist, andererseits der Versuch, die spiegelnden Silberlamellen durch spiegelnde Silbermolecüle zu ersetzen, deshalb als unzulässig bezeichnet werden muss, weil einzelne Molecüle ebensowenig im Stande sind, eine Lichtwelle zu reflectiren, als etwa die in der Luft suspendirten Staubtheilchen eine Schallwelle zurückzuwerfen vermögen. Endlich können reflectirende Silbermolecüle durch Feuchtigkeit ebensowenig ihr Reflexionsvermögen verlieren, als eine spiegelnde Silberlamelle.

Es bleibt als einziger Ausweg die Annahme, dass das in den silberhaltigen Gelatinelamellen vertheilte Silber lediglich zur Erhöhung des Lichtbrechungsvermögens und damit auch des Lichtreflexionsvermögens derselben beiträgt.

Auch diese Hypothese hat Lippmann zur Erklärung der Reflexfarben herangezogen, aber nur für die Farbenphotographie auf Bichromatgelatineplatten. Eine Ablagerung irgend einer Substanz innerhalb der Schicht findet hier nicht statt, nur das Aufsaugevermögen der Gelatine für Wasser wird in den Ebenen der Schwingungsmaxima durch die Wirkung des

1) Lippmann, Journ. de phys. (3) 3. p. 97. 1894.

Lichtes herabgesetzt. Deshalb ist auch im trockenen Zustande auf den Platten nichts von farbiger Reflexion zu bemerken, sowie aber die Schicht feucht wird, findet nach Lippmann¹⁾ folgender Vorgang statt: „Mais dès que l'eau intervient, les parties de la couche non impressionnées s'imbibent; l'indice de réfraction varie dès lors périodiquement dans l'épaisseur de la couche de même que le pouvoir réflecteur et l'image colorée devient visible.“ Hier ist also deutlich ausgesprochen, dass nach Lippmann's Ansicht der periodische Wechsel des Lichtbrechungsvermögens allein die Ursache der Reflexion sein kann!

Meslin, der wie wir sahen, an dem Vorhandensein spiegelnder Silberlamellen festhält, erklärt es für unwahrscheinlich, dass die in der Schicht vertheilten Silbermoleküle das Brechungsvermögen der Gelatine beeinflussen können, indem er ausführt²⁾: „...en tenant compte de l'argent, qu'elle contient, et du faible indice (de réfraction d. Verf.) qu'on attribue à ce métal, il résulte au contraire de là, que la présence des granules d'argent, répandus dans la pellicule n'y modifie que peu ou point la vitesse et la propagation de la lumière.“ Meslin begründet also diese Ansicht durch das geringe Brechungsvermögen des Silbers. Gerade das letztere ist indessen nichts weniger als mit Sicherheit bekannt. Beer fand aus den Constanten der elliptischen Polarisatation bei der Reflexion des Lichtes an Silberspiegeln den Brechungsexponenten des Silbers für gelbes Licht = 2,69. Drude nach derselben Methode = 0,18. Allerdings fand Kundt auch nach der Prismenmethode für weisses Licht 0,27, wodurch die Drude'sche Zahl gestützt wird, indessen haben neuere Untersuchungen gezeigt, wie stark derartige Bestimmungen durch die Oberflächenbeschaffenheit des Silbers beeinflusst werden. In unserem Falle liegt ferner höchstwahrscheinlich kein reines Silber, sondern ein Subbromid dieses Metalls vor. Die Brechungsexponenten der Silberverbindungen liegen aber relativ hoch, z. B. beim Silberbromid für die verschiedenen Lichtarten zwischen 2,2 und 2,3. Sollte aber auch der Brechungsexponent des Silberniederschlags ein sehr kleiner

1) Lippmann, *Compt. rend.* 115. p. 575. 1892.

2) Meslin, *Ann. chim. phys.* (6) 27. p. 371. 1892.

3) Landolt-Börnstein, *Phys. chem. Tab.* 1894.

sein, in jedem Falle ist er von dem der Gelatine, welcher 1,4 bis 1,5 beträgt, verschieden, und die Hypothese von dem periodischen Wechsel des Lichtbrechungsvermögens von einem Minimum zu einem folgenden Maximum behält durchaus ihre Berechtigung.

Auch die Anzahl dieser Minima und Maxima lässt sich nach den ausgeführten Messungen mit hinreichender Sicherheit feststellen. Rechnet man als Dicke der Gelatineschicht rund ein Tausendstel Millimeter, so können in derselben im Roth (halbe Wellenlänge = 0,00036 mm) nicht mehr als drei, im äussersten Violett (halbe Wellenlänge = 0,00020 mm) nicht mehr als fünf Maxima und Minima Platz finden.¹⁾ Dass die Zahl der Lamellen nicht willkürlich abgeändert werden darf, geht daraus hervor, dass die gemessene Dicke der Gelatineschicht diejenige darstellt, welche für eine möglichst gute Wiedergabe der Farben als die geeignetste befunden wurde und dass auch bei den nach Becquerel's Verfahren hergestellten Farbenphotogrammen die Dicke der Halogensilberschicht am besten etwa 0,0016 mm beträgt.²⁾

Eine nothwendige Folge dieses inneren Baues der Photochromien ist, dass nicht die silberhaltigen Lamellen allein die Lichtreflexion hervorbringen und die Gelatinelamellen nur als durchsichtige Trennungsschichten dienen, sondern dass sich beide Lamellengattungen an der Reflexion in ganz gleicher Weise betheiligen, ähnlich so, als ob Lamellen von zweierlei Lichtbrechungsvermögen von je einer viertel Wellenlänge Dicke abwechselnd übereinander gelegt wären. Gleich wie diese Lamellen alle die nämliche Dicke haben müssten, um eine bestimmte Farbe reflectiren zu können, so haben wir uns auch in den Photochromien die Ebenen mittleren Lichtbrechungsvermögens in je einer viertel Wellenlänge Abstand zu denken.

Eine gute Bestätigung für diese Gleichwerthigkeit der Lamellen bildet ein von Neuhauss³⁾ angestellter Versuch. Reibt man mechanisch von der obersten am stärksten an der Lichtreflexion betheiligten Schicht etwas ab, so wird sie dünner

1) Die Wellenlänge des Lichtes in Gelatine gleich der in Luft angenommen.

2) O. Wiener, Wied. Ann. 55. p. 225. 1895.

3) R. Neuhauss, Photogr. Rundschau 8. p. 301. 1894.

und die ursprünglich sichtbare Farbe macht der nächstfolgenden mit kürzerer Wellenlänge Platz, später nach völliger Entfernung der Schicht erscheint die erste Farbe wieder. Diesen Wechsel beobachtete Neuhauss bei allen Farben, beim Blau sogar wiederholt die Umwandlung in Violett, dann in Gelbgrün und wieder in Blau. Weder durch die Annahme dünner, einseitig spiegelnder Silberlamellen, noch periodisch angehäufter, spiegelnder Silberelemente lässt sich dieses Verhalten erklären, denn in beiden Fällen hängen die Farben nur von dem gegenseitigen Abstände der reflectirenden Theilchen ab und dieser kann durch allmähliches Abtragen der Schicht sicher nicht periodisch verändert werden.

5. Die Farbe des reflectirten Lichtes.

Lippmann hat, wie schon erwähnt, das Problem der Farbenwiedergabe durch Photochromien einer mathematischen Behandlung unterzogen und ist zu dem Resultat gelangt, dass die durch stehende Lichtwellen gebildeten Lamellen nur diejenige Lichtart zu reflectiren vermögen, durch welche sie erzeugt wurden. Indessen hat Lippmann auch auf die Unsicherheit dieser Schlussfolgerung hingewiesen, indem bei seiner Berechnung weder auf Absorption noch auf Phasenverlust bei der Reflexion Rücksicht genommen wurde. Als ein weiterer wesentlicher Mangel der Lippmann'schen Beweisführung ist es zu bezeichnen, dass in ihr eine unbestimmte, sehr grosse Anzahl von Lamellen in der Schicht angenommen wurde.

Ich hielt es daher für geboten, auch eine experimentelle Prüfung der Richtigkeit jener Schlussfolgerung durch die spectrokopische Zerlegung der von guten Photochromien des Spectrums zurückgeworfenen Farben zu versuchen. Bei der bedeutenden Leuchtkraft der letzteren, namentlich auf den Neuhauss'schen Photochromien gelang dies überraschend leicht. Schon wenn man den Spalt eines Handspectroskops der Längenausdehnung des Farbenbandes parallel stellte, konnte man die Verschiedenheit der Spectra der jetzt zu gleicher Zeit im Gesichtsfelde befindlichen Farben (meist zwei) sehr gut beobachten. Die im Lichte derselben fehlenden Farben sind in den abgeleiteten Spectren durch kräftige Absorptionsstreifen gekennzeichnet. Viel vortheilhafter aber er-

wies sich die folgende Anordnung: Die Photochromie wird durch Ueberdecken mit zwei Streifen mattschwarzen Papieres so weit abgeblendet, dass nur noch ein 1 bis 2 mm breites Farbenband übrig bleibt und vor einem möglichst dunklen Hintergrunde, am besten schwarzem Sammet, so aufgestellt, dass sie kräftiges Himmelslicht annähernd senkrecht reflectirt. Wird diese leuchtende Linie jetzt aus $1\frac{1}{2}$ bis 2 m Entfernung durch ein Handspectroskop ohne Spalt und Sammellinse, oder auch nur durch ein passend aufgestelltes Prisma betrachtet, so erblickt man ein von tiefschwarzen Absorptions- (oder richtiger Interferenz-) Streifen durchzogenes Spectrum, dessen Aussehen die umstehende Figur wiedergibt.

Der Streifen *RV* stellt die untersuchte Photochromie des Spectrums dar. Man findet darauf die Farben verzeichnet, welche das unbewaffnete Auge an den betreffenden Stellen wahrnimmt. Das darunter befindliche secundäre Spectrum zeigt die spectrale Zusammensetzung dieser Farben.

Wir erkennen sogleich, dass die Photochromie keine einfachen Farben reflectirt, denn in diesem Falle dürfte nur ein heller diagonaler Streifen im secundären Spectrum vorhanden sein. Aber auch keine einfachen Farben, welche durch beigemischtes weisses Licht abgeblasst erscheinen, denn auch dann dürfte neben diesem Streifen nur ein überall gleichmässiges, schwaches continuirliches Spectrum sichtbar sein. Statt dessen zeigen sich drei breite, wenig divergirende Lichtstreifen, welche durch völlig schwarze Interferenzstreifen voneinander getrennt sind.

Die spectroscopische Analyse beweist also im Gegensatze zur Theorie, dass *sämmtliche von Lippmann'schen Photochromien wiedergegebenen Spectralfarben Mischfarben sind, dass in jeder derselben zwar eine beschränkte Anzahl der Farben des Spectrums fehlen, dagegen andere von sehr verschiedener Wellenlänge sehr vollkommen reflectirt werden!*

Namentlich sei auf die starke Vermischung des Roth mit blauem und auf die des Blau und Violett mit gelbem und rothem Lichte hingewiesen. Im Violett macht sich diese Vermischung sogar dem blossen Auge durch einen Stich dieser Spectralfarbe ins Purpurroth bemerkbar. Die reinsten Farben sind ihrem Spectrum zufolge das Gelb und Grün. — Die leichten Schatten,

welche sich im secundären Spectrum der zu Grunde gelegten Photochromie zwischen den starken Interferenzbanden hinziehen, verdanken ihre Entstehung augenscheinlich geringen Unregelmässigkeiten in der Schicht, wie auch der Verlauf der Bande II im Violett durch ähnliche Ursachen kleine Störungen erlitten zu haben scheint.

Auch Meslin hat das von einer solchen Photochromie reflectirte Licht spectroscopisch untersucht, erhielt indessen nur ein undeutliches Spectrum, weil er einen mit Spalt versehenen Spectralapparat benutzte, vielleicht auch, weil ihm eine weniger brillante Photochromie zur Verfügung stand.



Er sagt¹⁾: „On obtient toujours dans les différentes parties un spectre entier, dont les diverses régions sont plus ou moins brillantes suivant la partie examinée.“ Auch bei Beleuchtung der Photochromie mit monochromatischem Lichte konnte nur constatirt werden, dass sämtliche Lichtarten überall, wenn auch verschieden stark reflectirt wurden. Nichts desto weniger geht aus Meslin's Beschreibung des secundären Spectrums hervor, dass er zweifellos die eine dunkle Bande erkannte, welche im secundären Spectrum links oben beginnend das Violett unterhalb des Grün der Photochromie erreicht. Diese Beobachtung steht durchaus im Einklange mit den Beobachtungen, welche ich selbst an weniger kräftigen Probeplatten

1) Meslin, l. c. p. 386.

gemacht habe, und bestätigt, dass die Farben auf Photochromien verschiedenen Ursprunges einerseits qualitativ gleich, andererseits im Widerspruch mit den Folgerungen der Lippmann'schen Theorie stets zusammengesetzte sind.

6. Die Entstehung der reflectirten Farben.

Es wäre nun eine dankenswerthe Aufgabe, in gleicher Weise wie es Lippmann ausgeführt hat, auf Grund der entwickelten Annahmen über den inneren Bau der Gelatineschicht rechnermässig den Nachweis zu führen, dass ein Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung nicht mehr vorhanden ist. Indessen wird an diese Behandlung des Problems nicht eher gedacht werden können, als bis wenigstens der Brechungsexponent der silberhaltigen Lamellen mit einiger Sicherheit bekannt ist. Auch dürften die Gesetze der Reflexion des Lichtes an so eigenartig gebauten Lamellen, namentlich aber der Phasenwechsel bei der Reflexion sich kaum mit hinreichender Sicherheit feststellen lassen. Aber in Ermangelung eines directen Beweises bietet es doch einiges Interesse, einen Fall der Lichtreflexion zu betrachten, für den die Verhältnisse ähnlich, nur weit einfacher liegen, als bei den Lamellen der Photochromien. Denken wir uns nämlich eine Anzahl dünner, durchsichtiger Lamellen von abwechselnd niederem und hohem Brechungsvermögen aufeinander gelegt, deren Dicke an der einen Seite $\frac{1}{4}$ Wellenlänge des rothen, an der anderen Seite $\frac{1}{4}$ Wellenlänge des violetten Lichtes (allgemein also $\lambda/4$) beträgt, und durch einen Schnitt parallel mit der obersten Lamelle eine Schicht von ein Tausendstel Millimeter Dicke abgehoben, so werden an der einen Seite derselben 5, an der anderen 10 Lamellen übereinander liegen und eine Schicht von ganz ähnlichen optischen Eigenschaften entstehen, wie sie die Gelatineschicht der Photochromien besitzt. Der Einwand, dass noch eine Verschmelzung der Lamellen stattzufinden habe, um ähnliche Bedingungen wie bei natürlichen Photochromien zu schaffen, kann deshalb nicht als schwerwiegend angesehen werden, weil wir einerseits über die Art des Ueberganges der Schichten mit hohem Brechungsvermögen in solche mit niederem Brechungsvermögen bei den Photochromien gar nichts

Genaues wissen und es wohl möglich ist, dass dieser Uebergang fast unvermittelt erfolgt, andererseits eine solche Verschmelzung voraussichtlich eine qualitative Aenderung der reflectirten Farben nicht zur Folge haben würde. Endlich kommt die gemachte Annahme dem vermutheten inneren Bau der Gelatine immer noch bedeutend näher, als die Annahme einseitig spiegelnder Silberlamellen oder Silbermoleküle. — Die an jeder Stelle einer solchen Schicht am kräftigsten reflectirten Farben lassen sich folgendermaassen berechnen:

Von den die Oberfläche einer Lamelle treffenden Lichtstrahlen irgend einer Wellenlänge λ' wird ein Theil hier reflectirt, ein anderer an der darauffolgenden Trennungsfläche, weitere an den übrigen noch vorhandenen Trennungsflächen, und sämmtliche zurückgeworfenen Lichtwellen können mit allen bereits vorher reflectirten zur Interferenz gelangen. Die Wegedifferenz beträgt für je eine hin- und zurückdurchlaufene Lamelle bei senkrechter Incidenz $\lambda/2$, d. h. ihre doppelte Dicke, für n durchlaufene Lamellen $n(\lambda/2)$. Erfolgte die Reflexion der zur Interferenz gelangenden Lichtwellen an der Oberfläche gleichartiger Lamellen, so ist entweder kein oder in beiden Fällen der gleiche Phasenverlust zu verzeichnen. Beide Antheile werden also dann in gleicher Schwingungsphase austreten und sich verstärken, wenn $\lambda' = n(\lambda/2)$, oder auch wenn $m\lambda' = n(\lambda/2)$ ist, d. h., wenn bis zur Interferenz eine beliebige ganze Anzahl (m) von Schwingungen vollzogen wurde.

Erfolgte die Reflexion einer Lichtart (sie habe die Wellenlänge λ'') an der Oberfläche ungleichartiger Lamellen, oder, was dasselbe ist, einmal an der Oberfläche, einmal an der Unterfläche gleichartiger Lamellen, so findet die Reflexion einmal beim Uebergang aus einem dichteren in ein dünneres, ein anderes Mal beim Uebergang aus einem dünneren in ein dichteres Medium statt, wodurch der Phasenunterschied von $n(\lambda/2)$ um eine weitere Phasendifferenz von $\lambda''/2$ vermehrt wird. Zwei in verschiedenen Tiefen reflectirte Antheile desselben Lichtstrahles werden also nach ihrer Wiedervereinigung sich in gleicher Schwingungsphase befinden, wenn:

$$m\lambda'' = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda''}{2}.$$

Die Wellenlängen der an unseren Lamellen am kräftigsten reflectirten Lichtarten sind demnach gegeben durch die Gleichungen:

$$\lambda' = \frac{n\lambda}{2m}, \quad \lambda'' = \frac{n\lambda}{2m-1}.$$

Dabei ist es wohl möglich, dass für λ' und λ'' identische Werthe resultiren. Ob und welche Lichtarten sich ganz oder theilweise auslöschen, soll nicht näher untersucht werden, da für uns die Frage, ob an einer Stelle für mehrere Lichtarten zugleich günstige Reflexionsbedingungen vorhanden sein können, die interessantere ist.

Tabelle 2.

n	m	Roth			Gelb		Grün		Blau			Violett		Ultraviolett		
		780	700	640	590	550	520		490	460	440	420	400	380	360	340
1	1		700	640	590	550	520		490	460	440	420	400			
2	1		700	640	590	550	520		490	460	440	420	400			
3	2		700	640	590	550	520		490	460	440	420				
	3	468	420													
4	2		700	640	590	550	520		490	460	440	420				
	3	520	467	427												
5	2									733		700	667	633	600	567
	3		700	640	590	550	520		490	460	440					
6	4	557	500	457												
	2								735	690	660	630	600	570	540	510
7	3			640	590	550	520		490	460	440					
	4			480												
8	3					728		686	643	616	588	560	532	503	476	
	4					550	520	490	460							
9	3							653	613	587	560	533	507	480		
	4							490	460							
10	3											720	683	648	612	
	4								566	540	514	488				
11	3												667	634	600	567
	4											500				
	4													597	566	534

Die Ueberschriften über den Spalten der vorstehenden Tabelle geben die Spectralfarben und ihre Wellenlängen λ , denen die Lamellendicke $\lambda/4$ entspricht. Darunter sind die Wellenlängen λ' und λ'' zusammengestellt, welche durch Einsetzen der

links stehenden Werthe für n und m in obige Gleichungen erhalten wurden. Auf der Seite des äussersten Roth sind für n die Zahlen 1—5, auf der des Violett 1—10 einzusetzen. (Ist die Wellenlänge des Lichtes innerhalb der Lamellen kleiner als in Luft, wie bei den Photochromien, so würden auf eine Schicht von 0,001 mm Dicke allerdings einige Lamellen mehr kommen, doch würde dadurch das Resultat nicht wesentlich geändert werden, auch bliebe noch festzustellen, ob die vortheilhafteste Dicke der Photochromien nicht möglicherweise noch etwas unter ein Tausendstel Millimeter liegt). Für m kann jede ganze Zahl eingesetzt werden, welche zu Werthen von λ' und λ'' zwischen 750 und 400 $\mu\mu$ führt (sichtbare Farben). Vorausgesetzt wurde auch, dass wie bei den Photochromien von Lamelle zu Lamelle eine geringe Absorption der violetten und blauen Lichtstrahlen stattfindet, derart, dass die letzte Lamelle nur von Strahlen mit mehr als 500 $\mu\mu$ Wellenlänge erreicht wird.¹⁾

Tab. 2 zeigt also, dass nur von den beiden ersten Lamellen dasjenige Licht am kräftigsten reflectirt wird, welches die Lamellen hätte erzeugen können, dass schon bei drei Lamellen auch andere Lichtarten des sichtbaren Spectrums kräftig zurückgeworfen werden und dass die Vermischung mit immer neuen Lichtarten um so stärker wird, je mehr Lamellen übereinander liegen. Von einer Reinigung des reflectirten Lichtes durch eine wachsende Zahl von Lamellen kann nur insofern gesprochen werden, als das Spectralgebiet, welches eine bestimmte Farbe umfasst, um so schmaler wird, je mehr Lamellen bei der Reflexion derselben theilhaftig waren.

In Tabelle 3 sind zur besseren Uebersicht die von unserer idealen Photochromie des Sonnenspectrums reflectirten Lichtarten nach ihrer Wellenlänge geordnet untereinander gesetzt und durch eine Zahl angegeben, wie oft in Tabelle 2 dieselbe Lichtart oder nahe dieselbe in jeder Verticalreihe wiederkehrt. Combinirt man dann sämmtliche untereinander stehenden Farben nach den Gesetzen der Mischung reiner Spectralfarben,

1) Diese Absorption ist nicht eine Folge der farbigen Reflexion! „Reflectirt“ werden sämmtliche Lichtarten in gleicher Weise, erst durch die spätere Interferenz wird ein Theil derselben ausgelöscht.

so erhält man als Resultat die Farben, welche das unbewaffnete Auge auf unserer Lamellenschicht im weissen Lichte wahrnehmen muss. Dieselben stehen in Tabelle 3 unter den einzelnen Verticalreihen.

Tabelle 3.

	ca.	Roth λ =			Gelb λ =	Grün λ =		Blau λ =			Violett λ =		Ultraviolett λ =		
		780	700	640	590	550	520	490	460	440	420	400	380	360	340
Roth	{	700	5				1	2	1	1	1	1	1		
		640		6				1	1	1	1	2	2	1	
Gelb		590			6				1	2	1	1	1	2	1
Grün	{	550	1			7				1	2	2	1	2	2
		520	1				7					2	2	1	2
		490		1	1			8					1	1	1
Blau	{	460	1	1	1				8						
		440								6					
Violett	{	420		1	1						4				
		400										2			

Grün Roth Gelb Grün Blau Purpur Grün

Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass diese unter den gemachten Voraussetzungen berechneten Farben thatsächlich mit denen übereinstimmen, welche eine gute Photochromie des Sonnenspectrums zeigt. Durch Vergleichung der vorstehenden Tabelle mit Fig. 1 kann man sich leicht davon überzeugen. Nicht nur führt die Combination der errechneten Lichtarten zu den für das Auge direct wahrnehmbaren Farben der Photochromie, sondern man erkennt auch in der Anordnung der Zahlen deutlich die drei breiten hellen Streifen wieder, welche in Fig. 1 das secundäre Spectrum ausmachen, sofern man nur berücksichtigt, dass der durch die höchsten Zahlen (in Tab. 3) bezeichnete Ort stärkster Reflexion nicht als ein so schmales Band aufzufassen ist, wie die Zahlenreihe selbst. Auch das charakteristische Grün an beiden Enden des Spectrums, welches nach der Figur dort als kräftigste Nebenfärbung auftritt, wo das äusserste Violett und Roth als die Hauptfarben unserem Auge unsichtbar werden, wird in gleicher

Weise durch die Rechnung erhalten und dadurch zugleich erklärt.

Muss auch zugegeben werden, dass die gemachten Voraussetzungen nicht ohne Weiteres auf Photochromien übertragbar sind, so rechtfertigt doch die auffallende Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den wirklich reflectirten Farben die Vermuthung, dass die angenommenen Verhältnisse den wirklichen mindestens sehr nahe kommen. —

Auf Meslins Erklärungsversuch muss ich noch kurz eingehen. Er beruht auf der Voraussetzung, dass spiegelnde Silberschichten durch Gelatinelamellen von je $\lambda/2$ Dicke voneinander getrennt sind. Meslin erklärt die reflectirten Farben von vornherein als Mischfarben und zwar als Newton'sche Farben III. Ordnung, indem er zu zeigen sucht, dass eine Gelatinelamelle von der Dicke $\lambda/2$ dieselben Farben reflectiren müsse, wie eine Luftlamelle von der Dicke λ , weil ja jene Lamelle aus einem Medium mit entsprechend höherem Brechungsexponenten als Luft bestehe. Meslin übersieht dabei, dass auch bei der Belichtung die Schwingungsknoten und Schwingungsbäuche nur um je eine halbe Wellenlänge des Lichtes in Bromsilbergelatine voneinander entfernt sind, d. h. bedeutend weniger als in Luft. Nach dem Ausfixiren des Bromsilbers, welches einen höheren Brechungsexponenten besitzt, als Gelatine, können demnach zwischen den Silberschichten nur Lamellen zurückbleiben, in denen das Licht weniger, keinesfalls aber mehr als eine halbe Schwingung auszuführen vermag.

7. Schlussbetrachtungen.

Die richtige Farbenwiedergabe mit Hülfe des Lippmann'schen Verfahrens hängt, wie bekannt, von der Befolgung einer Anzahl von Bedingungen ab, deren Begründung auch von praktischem Interesse ist.

a) Die Dicke der Schicht darf ein bestimmtes Maximalmaass nicht übersteigen, da sonst neben den bei der Belichtung wirksamen auch Lichtarten ganz anderer Wellenlänge reflectirt werden. Nach den bisherigen Erfahrungen wird dieses Maass auf höchstens 0,001 mm festzusetzen sein, wenn es nicht gelingt, dafür zu sorgen, dass sich bei der Belichtung nur eine

beschränkte Anzahl Lamellen zunächst der Oberfläche der Gelatine bildet.

b) Um eine solche Feinheit der Schicht zu erreichen, ist es nothwendig, eine sehr feinkörnige Emulsion zur Herstellung der Platten zu verwenden, da die Korngrösse leicht den Betrag von 0,001 mm übersteigen kann.

c) Nur bei richtiger Belichtungsdauer können die Farben richtig wiedergegeben werden. Denn jedes einzelne Lamellenpaar ist entstanden, indem in den Ebenen der Knoten und deren Nachbarschaft das unveränderte Bromsilber aus der Gelatine herausfixirt wurde, wodurch der Brechungsexponent dieser Lamellen sank, während in den Ebenen der Bäuche Silber deponirt und der Brechungsexponent an diesen Stellen erhöht wurde. Nehmen wir nun an, dass die Belichtungsdauer so abgepasst war, dass beide Veränderungen sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, so wird sowohl jede einzelne Lamelle den Raum einer Viertelwellenlänge, als auch je zwei Lamellen den Raum einer halben Wellenlänge einnehmen. Wird dagegen nach zu langer Belichtung bei der Entwicklung zu viel Silber angehäuft, so wächst der Brechungsexponent der Lamellen und die Wellenlänge des Lichtes in ihnen nimmt ab. Die durch Licht irgend einer Wellenlänge erzeugten Lamellen werden daher jetzt für eine Lichtart mit etwas grösserer Wellenlänge „passend“ sein und diese am kräftigsten reflectiren. Das ganze Spectrum, und namentlich diejenigen Farben, welche auf die empfindliche Schicht am stärksten wirkten, muss sich auf der Platte nach dem violetten Ende hin verschieben. Ist endlich die Silberabscheidung durch die ganze Schicht erfolgt, so müssen mit dem Verschwinden der optisch verschiedenartigen Lamellen auch die Farben ausbleiben. —

Aber selbst wenn diese und noch einige weitere Bedingungen erfüllt worden sind, erhalten wir doch nur eine Photochromie, deren Farben im besten Falle für unser Auge befriedigend mit denen des Originals übereinstimmen, im physikalischen Sinne lassen sich noch beträchtliche Unterschiede zwischen den scheinbar übereinstimmenden Farben nachweisen. Endlich steht der praktischen Verwendung des Verfahrens die Abhängigkeit der fertigen Photochromien von dem jeweiligen Luftzustande und von der Zusammensetzung

und dem Einfallswinkel des bei der Betrachtung benutzten weissen Lichtes entgegen.

Ob alle diese Mängel sich später werden beseitigen lassen? Sicher ist, dass es noch vieler und uneigennütziger Arbeit bedarf, um die Farbenphotographie nach Lippmann'schem Verfahren über den Standpunkt eines interessanten und lehrreichen physikalischen Experimentes zu erheben.

Berlin, November 1895.

**17. Zur Frage über den Einfluss der
Phasendifferenz der harmonischen Töne auf die
Klangfarbe; von Rudolph König.**

In meiner Abhandlung „Bemerkungen über die Klangfarbe“¹⁾ hatte ich nachgewiesen, dass die Beobachtung der Erscheinungen beim Zusammenklange zweier einfacher Töne, und speciell die der Stösse bei harmonischen Intervallen, logisch zu dem Schlusse führt, die Phasendifferenz zwischen den harmonischen Tönen müsse nothwendig einen Einfluss auf die Klangfarbe haben, und ich hatte in derselben Arbeit dann ferner auch noch untersucht, indem ich mich dabei hauptsächlich der Wellensirene bediente, „wie gross dieser Einfluss unter verschiedenen Umständen sein könne, und wie viel das Ohr davon wahrzunehmen im Stande ist.“ Vor einiger Zeit hat nun Hermann in einer Abhandlung „Beiträge zur Lehre von Klangwahrnehmungen“²⁾, diese Frage über den Einfluss der Phasendifferenz von neuem behandelt, und geglaubt Gründe aufstellen zu können, aus denen hervorgehen soll, dass die Phasendifferenz durchaus keinen Einfluss auf die Klangfarbe hätte. Ich glaube nun zwar, dass sich die Antwort auf diese Gründe schon aus meinen früheren Schriften herauslesen lässt, aber wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes scheint es mir dennoch zweckmässig, dieselben durch einige Bemerkungen zu beleuchten, und wenn ich dieses erst jetzt thue, so liegt der Grund dafür darin, dass ich, als die Arbeit von Hermann erschien, gerade mit Untersuchungen über die Leistungsfähigkeit der Wellensirene beschäftigt war, die ich zunächst beenden wollte, und deren Resultate ich jetzt veröffentlicht habe.

I. Experimente mit Stimmgabeln.

Ich muss zuerst erwähnen, dass Hermann meine Ableitung des Einflusses der Phasendifferenz aus den Erschei-

1) R. König, Wied. Ann. 1881 und Quelques Exp. p. 218.

2) Pflüger, Arch. f. Physiol. 56. p. 467.

nungen beim Zusammenklang zweier Töne, durchaus übergeht, und sich hauptsächlich nur darauf beschränkt, gegen die Leistungsfähigkeit der Wellensirene, und somit also auch gegen die Richtigkeit der vermittels dieser Untersuchungsmethode gefundenen Resultate, Einspruch zu erheben. Natürlich hat es ihm aber dabei doch nicht entgehen können, dass sich aus dem Verhalten des Zusammenklanges von einem Grundton mit einem einzigen harmonischen Tone bei verschiedener Phasendifferenz, die Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines Einflusses der Phasendifferenz auf die Klangfarbe müsse bestimmen lassen, und so hat er also auch wieder, wie früher Lord Kelvin, an den vier Curven des Octavenintervalles für die Phasendifferenzen $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, die Vorgänge während eines Stosses untersucht, und kommt dabei zu dem Schlusse „Die verstimmte Octave müsste mit dem Grundtone eine schwebungsartige Klangabwechslung zeigen, und zwar zweimal so häufig, wie sie mit der reinen Octave schwebt, oder viermal so häufig, wie der reine Grundton mit dem verstimmten Grundton schwebt“, im Falle die Phasenverschiebung einen Einfluss auf die Klangfarbe haben sollte. Er erklärt darauf beim Zusammenklange zweier etwas verstimmter Stimmgabeln auf Resonanzkästen, \bar{c} und \bar{c} ($U t_3$ und $u t_4$), nicht das Mindeste hiervon gehört zu haben, und glaubt daraus den Schluss ziehen zu dürfen „Man kann also mit der grössten Sicherheit behaupten, dass die Phasenverhältnisse der Partialtöne keinen Einfluss auf das Ohr haben.“ Nun habe ich aber diese Tonschwankungen nicht nur bei der gestörten Octave, sondern sogar auch noch bei den gestörten harmonischen Intervallen 1:3 und 1:4, schon achtzehn Jahre früher als Hermann seinen missglückten Versuch gemacht, sie bei der gestörten Octave zu hören, nicht nur beobachtet, sondern auch in meiner Abhandlung „Ueber den Zusammenklang zweier Töne“¹⁾ genau beschrieben, und kann auch versichern, dass, so oft ich auch in der langen Reihe von Jahren seitdem Gelegenheit gehabt, diese Experimente vor Gelehrten zu wiederholen, ich noch nie auch nur einen gefunden habe, der diese Tonschwankungen nicht hätte hören können. Ausserdem aber haben die Beobachtungen von

1) R. König, Pogg. Ann. 157. p. 188. 1876 und Quelques Exp. p. 99.

Lord Kelvin, welche er in seiner etwa anderthalb Jahre nach meiner Arbeit erschienenen Schrift „On beats of imperfect harmonies“¹⁾ veröffentlicht, die Richtigkeit der meinigen ebenfalls so vollkommen bestätigt, dass über die Existenz dieser Tonschwankungen auch nicht der geringste Zweifel mehr stattfinden kann.

Um dem Leser das lästige Umschlagen zu ersparen, dürfte es vielleicht zweckmässig sein, hier die auf diesen Gegenstand bezügliche früher von mir geschriebene Stelle, wie auch einige Citate aus der Abhandlung von Lord Kelvin folgen zu lassen. Ich schrieb²⁾:

„Eine Eigenthümlichkeit der Stösse harmonischer Intervalle besteht noch darin, dass die beiden primären Töne abwechselnd hervortreten. Lässt man neben dem starken, grossen *C* das nur um einen geringen Theil einer Schwingung verstimmte kleine *c* ertönen, sodass sich sehr langsame Stösse bilden, so hört man abwechselnd einmal den Grundton und einmal die Octave so deutlich hervortreten, dass man, wenn das kleine *c* sehr stark ist, mitunter geneigt sein könnte, jede Schwebung doppelt zu zählen. Ist das kleine *c* dagegen schwach, so hört man nur den Grundton abwechselnd stärker und schwächer werden. Ganz dieselbe Beobachtung habe ich auch bei den sehr langsamen Stössen der Duodecime und der Doppel-octave, *C:g* und *C:c*, machen können, aber bei nur einigermaassen schnellen Schwebungen lässt sich das periodische Hervortreten des höheren Tones nicht mehr wahrnehmen.

Auch diese Erscheinungen dürften sich leichter aus den Figuren der Stösse dieser Intervalle erklären lassen, als aus der Annahme resultirender Zwischentöne, welche man nicht hören kann.“...

Lord Kelvin, nachdem er erklärt, dass die Theorie nur die ganze Periode des Phenomens angäbe, jedoch nicht die Frage beantwortete, ob das Ohr die graduelle Veränderung der Qualität durch die ganze Periode wahrnehmen könne, oder ob es unfähig wäre die verschiedene Qualität zwischen zwei

1) Lord Kelvin, Proceedings of the Roy. Soc. of Edinburgh, Session 1877—1878.

2) R. König, Pogg. Ann 157. p. 188. 1876.

Hälften der Periode zu erkennen, sagt, möglichst wörtlich übersetzt:

„Meine Experimente beweisen, dass in jedem Falle das Ohr die zwei Hälften der Periode jedes Stosses unterscheidet. Also z. B. bei dem Stosse einer Annäherung an die Harmonie 1:2, bei welcher die Veränderung des Luftdruckes auf das Ohr durch die vorhergehenden Curven für vier Fälle der betreffenden Periode angegeben ist, finde ich, dass das Ohr die Qualität des Tones, der durch die scharf gegipfelte (sharp-topped), und unten flache (flathollowet) Curve dargestellt wird, von der des Tones unterscheidet, der durch die flach gegipfelte und unten scharf zugespitzte repräsentirt wird.“...

...„Welches auch immerhin die physiologische Theorie sein mag, durch welche die Stösse zu erklären sind, es ist eine interessante Thatsache, dass das Ohr unterscheidet, wie es der Fall ist, zwischen einem Stoss (push) und einem Zug (pull) auf das Trommelfell, in der durch die vorhergehenden Curven dargestellten Weise, nicht nur für den Fall der Annäherung an die Harmonie 1:2, sondern auch bei jeder anderen „even binary“ Harmonie.“...

...„Ehe ich die Experimente machte, dachte ich es möglich, dass was beim Stosse gehört wird, keinen Unterschied machen möchte, zwischen den Configurationen II und IV¹⁾, aber ein periodischer Charakter (revolving character), welchen ich beim Stosse wahrnehme, scheint mir deutlich genug um zu beweisen, dass das Ohr zwischen diesen Configurationen unterscheidet, von denen die eine dieselbe ist wie die andere in der umgekehrten Zeitfolge.“...

Aus diesen Beobachtungen geht also hervor, dass das Ohr sowohl zwischen den beiden Klängen bei der Coincidenz der Maxima und der Coincidenz der Minima, als auch zwischen den beiden Klängen der Phasencoincidenz von 0 und $\frac{1}{3}$, unterscheiden kann, und somit während der ganzen Periode eines Stosses sich die Klangfarbe beständig verändert, und hierin ist denn auch der Grund zu suchen, dass die Anzahl der Stösse nicht doppelt so gross wird als der Fehler der Frequenz der höheren Note. Eine solche Verdoppelung der Anzahl der

1) Den Curven *a* und *c* bei Hermann entsprechend.

Stösse wird in der That nur entstehen, wie Lord Kelvin an den erwähnten Curven des gestörten Octavenintervalles ausinandergesetzt hat, wenn das Ohr etwa die beiden Klänge der Coincidenz der Maxima und der Coincidenz der Minima nicht voneinander unterscheiden könnte, und nur diese beiden Klänge von den beiden Klängen der Phasencoincidenz von 0 und $\frac{1}{2}$, oder wenn etwa, wie Hermann glaubt, das Ohr wirklich unfähig wäre die beiden Klänge mit der Phasencoincidenz von 0 und von $\frac{1}{2}$, unterscheiden zu können, während es die beiden Klänge der Coincidenz der Maxima und der Coincidenz der Minima verschieden empfände.

Man könnte sich nun fragen, wie es möglich gewesen ist, dass Hermann von diesen Tonschwankungen nichts hat hören können, da sie verhältnissmässig so leicht vernehmbar sind, denn handelte es sich nur um meine Untersuchungen, so könnte man geneigt sein die grosse Deutlichkeit der Erscheinung der Anwendung sehr tiefer Töne, und der Benutzung von Instrumenten zuzuschreiben, welche in der That eine bedeutend grössere Leistungsfähigkeit als die gewöhnlich in physikalischen Sammlungen vorhandenen Apparate besitzen, diese Erklärung wird aber dadurch völlig unzureichend, dass Lord Kelvin seine Beobachtungen mit Tönen von derselben Höhe und mit Stimmgabeln ganz gleicher Construction ausgeführt hat, wie Hermann. Bei einigen Experimenten, welche ich deshalb mit den gewöhnlichen Stimmgabeln auf Resonanzkästen, mit Zinken von ungefähr 10 und 8 mm Dicke, und 14 mm Breite, anstellte, fand ich, dass es weit weniger die Höhe der Töne selbst, oder ihre zu geringe absolute Intensität ist, welche bei der Beobachtung dieser Tonschwankungen hindernd auftritt, als vielmehr die Ungleichheit in der Abnahme der Intensität bei beiden Tönen, und dass diese also sehr vermuthlich auch die Erfolglosigkeit des Versuches von Hermann mit der verstimmtten Octave c' und c'' , wird veranlasst haben. Ich fand in der That bei der Wiederholung dieses Versuches mit den gewöhnlichen Gabeln \bar{c} und \bar{c} , dass selbst bei einer Verstimmung des Zusammenklanges von nur einer Schwebung in etwa zwei bis drei Secunden, die Tonschwankungen nicht deutlich hervortraten, wenn die Intensität des Tones c'' , viel schneller abnahm, als die des Grundtones c' , wogegen sich

das abwechselnde Anschwellen beider Töne sofort ganz gut beobachten liess, wenn ich die Abnahme der Intensität der Gabel c'' , dadurch beträchtlich verlangsamte, dass ich ihren Resonanzkasten genügend verstimmte, was sich bekanntlich immer leicht thun lässt, indem man z. B. ein kleines zusammengelegtes Taschentuch zum Theil in denselben hineinschiebt.

Ist die Abnahme der Intensität der beiden Töne ziemlich gleich langsam, so kann man die Tonschwankungen sogar noch mit den gewöhnlichen Stimmgabeln auf Resonanzkästen c' und c'' , ohne jede Schwierigkeit wahrnehmen, jedoch nicht nach jedem Bogenstriche, denn ihre Deutlichkeit hängt immer sehr von den gerade stattfindenden Intensitätsverhältnissen der beiden Töne ab.

Schliesslich möchte ich in Bezug auf diese Tonschwankungen noch bemerken, dass sich aus ihnen allerdings zwar hauptsächlich die grössere oder geringere Wahrnehmbarkeit des Einflusses der Phasendifferenz der harmonischen Töne bei verschiedenen Klangfarben ableiten lässt, dass sie jedoch für die blosse Entscheidung der Frage selbst, ob die Phasenverschiebung überhaupt einen Einfluss auf die Klangfarbe haben könne, durchaus nicht ganz besonders, oder gar allein, von Wichtigkeit sind, da schon die blosse Existenz der Stösse bei gestörten harmonischen Intervallen, die absolute Nothwendigkeit eines solchen Einflusses bei allen Klängen mit mehr als nur einem einzigen harmonischen Tone bedingt, wie ich in meinen „Bemerkungen über die Klangfarbe“¹⁾ auseinander-gesetzt habe.

II. Experimente mit der Wellensirene.

Was die Einwände anlangt, welche Hermann gegen meine Experimente mit der Wellensirene gemacht, so würden diese, selbst wenn sie gerechtfertigt wären, natürlich noch immer nicht die aus den Erscheinungen beim Zusammenklang zweier Stimmgabeltöne logisch abgeleiteten Resultate umstossen können, wie wenig sie aber alle ohne Ausnahme stichhaltig sind, werde

1) R. König, Wied. Ann. 14. p. 375. 1881 und Quelques Exp. p. 223—223.

ich in Folgendem zeigen, wo ich sie der Reihe nach untersuchen will.

1. Hermann findet es auffallend, dass zwei Klänge, von denen der eine die ganze Reihe, der andere nur die ungeraden der harmonischen Töne mit regelmässig abnehmenden Amplituden enthält, keinen grösseren Unterschied zwischen sich hören lassen, als dieses beim Anblasen ihrer Wellencurven der Fall ist, da aber die Richtigkeit seiner Vermuthung, dass dieser Unterschied grösser sein müsste, von ihm auf kein directes Experiment gestützt worden ist, so kann auch eine solche blosser Annahme offenbar nicht ausreichen, die Resultate der Wellensirene für falsch zu erklären.

Wählt man übrigens die Tonhöhe der Klänge nicht zu tief, sondern etwa in der Mitte der Octave von c' zu c'' , so ist der Klang der Curve $1, 2, 3 \dots n$, Ph. 0, so beträchtlich viel lauter und runder, als der Klang der Curve $1, 3, 5 \dots n$, Ph. 0 und $\frac{1}{2}$, dass man durchaus nicht nöthig hat vorauszusetzen, dass der Unterschied zwischen beiden Klängen noch grösser sein müsste.

2. Wie der Umstand, dass die Klänge der Wellensirene so gut wie unabhängig von dem Abstände der Luftspalte von den ausgeschnittenen Curvenstreifen zu sein scheinen, gegen die Richtigkeit der Annahme zeugt, dass bei der Tonerzeugung starke Luftanstauungen vor den Wellenstreifen eine grosse Rolle spielen, habe ich schon oben¹⁾ erläutert.

3. Die kleine Wellensirene für die Experimente über die Phasendifferenz²⁾ construirt ich mit drehbaren Anblasespalten, damit man an ihnen auch die Klangumwandlungen bei verschiedenen Spaltenneigungen beobachten könne, welche alle ganz genau mit den theoretisch geforderten Resultaten übereinstimmen. An den beiden Curven dieses Instrumentes $1, 2, 3 \dots n$, Ph. 0, und $1, 2, 3 \dots n$, Ph. $\frac{1}{2}$, hat Hermann die Klänge, die bei den beiden äussersten Spaltenneigungen entstehen, ganz richtig beschrieben, statt sie jedoch mit den ihnen zukommenden Curven zu vergleichen³⁾, wobei er sogleich die vollständige

1) Vgl. Wellensirene p. 9.

2) Catal. p. 60. 1889.

3) Vgl. Wellens. Fig. 18.

Uebereinstimmung zwischen den Experimenten und der Theorie erkannt haben würde, erklärt er, dass diesen Erscheinungen folgendes „Gesetz“, welches er mit gesperrter Schrift druckt, zu Grunde liege, „Der Schall ist unter sonst gleichen Umständen am schärfsten, wenn die Spaltenöffnung durch die Curve so plötzlich als möglich verdeckt oder freigelegt wird, und zwar wirkt plötzliche Verdeckung weit schärfer, als plötzliche Oeffnung.“ Dieses „Gesetz“, sagt aber doch im Grunde nichts Anderes, als dass ein Klang der oben beschriebenen Art, um so schärfer ist, als der Gipfel seiner Curve weiter von der Mitte derselben entfernt ist, weil dann seine harmonischen Töne grössere Amplituden haben, und dass von zwei solchen Klängen mit ganz gleichen harmonischen Tönen, aber Phasendifferenzen von 0 und $\frac{1}{2}$, der letztere schärfer ist als der erste. Wenn Hermann aber weiter bemerkt, dass Schiefstellung der Spalte vor diesen Curven „stets“ den Klang verstärkt, so würde dieses allerdings, wenn es wahr wäre, unbedingt gegen die Treue der Uebertragung von Curven in Luftschwingungen durch die Wellensirene sprechen, aber das Verschwinden aller Schärfe aus dem Klange, und sein Uebergang in einen einfachen Ton bei der Mittelstellung der Spalte zwischen ihren äussersten Neigungen, welche ich oben¹⁾ beschrieben habe, ist so sehr deutlich, dass die Behauptung Hermann's sich geradezu nicht erklären lässt.

4. Hermann gibt dem Versuche von Fleeming Jenkins und J. A. Ewing²⁾, nach welchem der Phonograph bei umgekehrter Drehungsrichtung seines Cylinders die Vocale und Consonanten ebenso wie bei den directen hören lässt, eine Bedeutung, welche ihm für die Frage nach dem Einfluss der Phasendifferenz in keiner Weise zugeschrieben werden kann. Schon der Umstand, dass die Wellensirene ebenfalls, wenn eine Vocalcurve angeblasen wird, bei den beiden entgegengesetzten Drehungsrichtungen den gleichen Vocal hören lässt; während sie mit andern Curven dabei zwei verschiedene Klänge hervorbringt, auch dass nicht einmal am Phonograph selbst, die Umkehrung mit jedem Klange ohne Ausnahme vorgenom-

1) Vgl. Wellens. p. 25. Fig. 18.

2) Jenkins u. Ewig, Nature 438. p. 423. 1878.

men werden kann, ohne ihn zu verändern, wie ja nach Hermann¹⁾ z. B. die Klänge des Claviers bei derselben „ganz verändert“ und „trompetenartig“, wiedergegeben werden, beweist, dass es ganz auf die Natur der Curve ankommt, ob bei ihrer Abscissenumkehrung ein Wechsel in der Klangfarbe zur Wahrnehmung kommt oder nicht.

Selbstverständlich würde schon bei allen Curven, welche aus zwei symmetrischen Hälften bestehen, die Abscissenumkehrung ganz ohne jede Wirkung bleiben müssen, und wenn sich auch an vielen Klängen, deren Curven ganz unsymmetrisch sind, geradezu gar kein Einfluss der Phasendifferenz nachweisen lässt, so liegt dieses gewöhnlich der Hauptsache nach in der relativen Intensität ihrer harmonischen Töne. Es bestehen in der That die engsten Beziehungen zwischen den Aenderungen der Klangfarbe durch Phasenverschiebungen ihrer Partialtöne, und den Stößen gestörter harmonischer Intervalle, ja diese Klangfarbenwechsel und Stösse sind im Grunde nur eine und dieselbe Erscheinung. Nun lassen sich diese Stösse zwar noch bis zum Intervalle $1:14 \mp$, deutlich nachweisen¹⁾, jedoch treten sie bei allen harmonischen Intervallen immer nur bei gewissen Intensitätsverhältnissen der beiden Töne mit grösster Deutlichkeit hervor, während sie bei andern weit schwächer, oder oft auch, wie besonders bei den weiteren Intervallen, gar nicht mehr wahrnehmbar sind. Bestehen also unter den harmonischen Tönen eines Klanges solche Intensitätsverhältnisse, dass sie einzeln genommen weder mit dem Grundtone noch mit einem der anderen harmonischen Töne bei einer continuirlichen Phasenverschiebung, irgend welche, oder nur sehr wenig ausgeprägte Stösse hören lassen würden, so kann die Phasenverschiebung bei mehreren dieser harmonischen Töne auch keinen Wechsel in der Klangfarbe vernehmbar hervortreten lassen, was sie im entgegengesetzten Falle thun möchte.

Die Schwierigkeit bei den Untersuchungen über den Einfluss der Phasendifferenz besteht hiernach also keineswegs darin, einen Klang aufzufinden, bei welchem eine bestimmte

1) Hermann, Pfüger's Arch. 53. p. 9.

2) König, Wied. Ann. 12. p. 341. 1881; Quelque Exp. p. 156.

Phasenverschiebung keinen hörbaren Unterschied in der Klangfarbe hervorruft, als vielmehr im Gegentheil die Fälle zu erkennen, bei welchen sich ein Einfluss derselben nachweisen lässt, und herauszufinden, bei welcher Phasenverschiebung dieses mit der grössten Deutlichkeit geschehen kann, und Beispiele von Klängen, die bei einer bestimmten Phasenverschiebung, wie die Vocalcurven bei der Abscissenumkehrung, keinen Wechsel der Klangfarbe vernehmen lassen, können also durchaus nicht beweisen, dass ein solcher nie, bei keinem Klange, und bei keiner Phasendifferenz soll zur Wahrnehmung kommen können. —

6. Ich habe in meiner Abhandlung „Bemerkungen über die Klangfarbe“, bei der Besprechung von Wellencurven leider mehrfach die Nachlässigkeit begangen „Intensität“, statt „Amplitude“, und selbst auch auf einigen Figuren „I“ statt „A“ zu schreiben, was ich, seit ich es bemerkt, selbst öffentlich zu berichtigen bis jetzt keine Gelegenheit gehabt hatte, und Hermann hat also sehr mit Recht auf diesen Fehler aufmerksam gemacht. Diese Verwechselung der beiden Ausdrücke dürfte aber wohl gerade darum von nur geringer Wichtigkeit sein, weil sie so leicht zu erkennen ist, nicht nur durch den Text, sondern auch schon durch den blossen Anblick der Figuren. Dass ich aber dabei nicht wirklich von der physiologischen Intensität der betreffenden Töne, auf die es hier doch allein ankommen würde, haben sprechen wollen, mag das Geständniss beweisen, dass mir bis jetzt das wahre Verhältniss zwischen den Amplituden verschieden hoher Töne, und ihrer physiologischen Intensität vollständig unbekannt ist.

7. Dass die Wellensirene, an der nur Sinuscurven angeblasen werden, mir Resultate gegeben, welche durchaus mit denen an der Sirene mit Klangcurven übereinstimmen, obgleich an ihr fast alle bei der letzteren vorausgesetzten Fehlerquellen von selbst wegfallen, übergeht Hermann einfach mit der Bemerkung, dass er über diesen Apparat keine eigenen Erfahrungen besitze. Ich bedauere diesen Umstand allerdings, glaube aber, dass er den Experimenten mit der Sinuswellensirene ihre Bedeutung doch nicht wird entziehen können, da ich schon zu oft Gelegenheit gehabt, sie vor competenten Gelehrten zu wiederholen und ihre Richtigkeit constatiren zu

lassen, als dass man auch jetzt noch an letzteren zu zweifeln ein Recht haben könne.

Kurz zusammengefasst geht also aus den vorstehenden Bemerkungen Folgendes hervor:

1, Der Grund, weshalb Hermann geglaubt hat, nach seinen Beobachtungen von Stimmgabeln „mit grösster Sicherheit behaupten zu können, dass Phasenverhältnisse der Partialtöne keinen Einfluss auf das Ohr haben“, läuft schliesslich nur auf einen ihm missglückten Versuch hinaus, sich von den Tonschwankungen beim gestörten Octavenintervalle zu überzeugen, die schon seit langen Jahren, nicht nur an diesem, sondern auch noch an beträchtlich weiteren gestörten harmonischen Intervallen entdeckt, seitdem oft öffentlich demonstriert worden waren, und in jedem Augenblicke auf das Deutlichste von neuem wieder dargestellt werden können.

2. Wenn Hermann behauptet, dass „jede“ Neigung der Luftspalte vor den Curven 1, 2, 3 . . . n, Ph. 0 und $\frac{1}{2}$, die Klänge dieser verstärke und schärfer mache, was allerdings gegen die Genauigkeit der Uebertragung von Curven in Luftschwingungen durch die Wellensirene sprechen würde, so ist dieses im vollständigsten Widerspruch mit den Experimenten, unter allen andern, wirklich richtigen Beobachtungen, welche er an der Wellensirene gemacht, ist aber keine, die nicht genau den theoretischen Erfordernissen entspräche, sodass die früher von mir in Bezug auf die Phasendifferenz mit diesen Instrumenten gemachte Versuche keineswegs zu verwerfen sind.

P. S. Was die weiteren, nicht direct die Frage über den Einfluss der Phasendifferenz betreffenden Experimente anlangt, welche Hermann in derselben Abhandlung noch beschrieben, möchte ich nur erwähnen, dass ich bei meinen Untersuchungen über den Ton, welcher durch gleiche Perioden isochroner Schwingungen hervorgerufen wird, die von einer Periode zur andern ihre Phasen wechseln¹⁾, ausser den Löchersirenen, auch die Wellensirenen angewendet habe, mit denen ich Perioden von sehr verschiedener Wellenzahl

1) König, Pogg. Ann. 157. p. 232. 1876; Quelques Exp. p. 143. Fig. 40, 41.

herstellte¹⁾, deren kürzeste die des Quintenintervalles war, welches nur drei gleichweit voneinander abstehende Wellengipfel enthält, und also eine noch kürzere Periode bildet, als die aus vier Zähnen bestehende, welche Hermann seitdem an einem Zahnrade geprüft hat. Da die Töne sowohl der Löchersirene wie der Wellensirene durchaus nichts zu wünschen übrig lassen, so kann ich in der Anwendung von Zahnradern für diese Untersuchungen keine Verbesserung der Beobachtungsmethode erkennen, und der Vorzug, welchen Hermann ihnen gegeben, scheint mir nur dadurch erklärbar, dass seine Löchersirenen ausserordentlich schlecht eingerichtet gewesen sein müssen, wie auch aus seiner Aeusserung hervorzugehen scheint, dass er mit denselben „wegen der stets sich störend einmischenden Nebengeräusche, kein befriedigendes Resultat erlangen konnte.“

Ebenso scheint mir auch der ursprüngliche Apparat der Hrn. A. Terquem und Boussinesq für die experimentelle Prüfung ihrer Theorie des Mitteltones, dessen Schwingungszahl dem arithmetischen Mittel der beiden primären Schwingungszahlen gleich ist, zusammengestellt hatten, und von dem sie in ihrer Abhandlung²⁾ auch die schematische Figur gegeben, unbedingt den einfachen Stimmgabeln auf Resonanzkästen vorzuziehen zu sein, welche Hermann bei seiner Wiederholung der Experimente über diesen Ton angewendet. Terquem und Boussinesq bedienten sich bekanntlich electrischer Stimmgabeln mit Laufgewichten, die vor Universalresonatoren vibrirten, welche durch Kautschukschläuche mit dem Ohre verbunden waren, und hierdurch wurde es ihnen also möglich immer mit beliebig lange dauernden Tönen irgend einer gewählten Tonhöhe zu experimentiren, deren Intensität entweder constant erhalten, oder auch durch stärkeres oder schwächeres Zusammendrücken der Schläuche willkürlich geschwächt werden konnte, was alles sehr bedeutende Vortheile sind, welche die gewöhnlichen Stimmgabeln auf Resonanzkästen nicht gewähren.

Paris, September 1895.

2) König, Wied. Ann. 12. p. 345. 1881; Quelques Exp. p. 158.

3) A. Terquem u. Boussinesq, Journ. de Phys. 4. 1875.

18. *Theorie der Schubspannungen und der spannungslosen Geraden;*
von Ferdinand Wittenbauer.

1. Der Spannungszustand in jedem Punkte eines festen Körpers wird seit Lamé (Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides) durch Angabe des Spannungsellipsoids definirt. Die Halbmesser desselben geben nach Grösse und Richtung die Spannungen des Punktes an; ist

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

die auf die Axen des Ellipsoids bezogene Gleichung desselben, so werden A, B, C die Hauptspannungen des Punktes genannt; jede von ihnen wirkt normal zu der sie nicht enthaltenden Hauptebene des Ellipsoids.

Für jede andere Ebene des Punktes, die unter den Winkeln α, β, γ gegen die Hauptebenen BC, CA, AB des Ellipsoids geneigt angenommen wird, ist die zugehörige Spannung p aus der Gleichung zu gewinnen:

worin
$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2,$$

(1)
$$p_x = A \cos \alpha, \quad p_y = B \cos \beta, \quad p_z = C \cos \gamma$$

die Projectionen der Spannung p auf die Hauptspannungen A, B, C bedeuten.

Die Wirkung der Spannung p auf die ihr zugeordnete Ebene $\alpha\beta\gamma$ ist eine doppelte; sie zerfällt in eine senkrecht zur Ebene gerichtete Normalspannung σ und in eine Schubspannung τ , welche in die Ebene fällt. Die Spannungstheorie liefert hierfür die Gleichungen

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

(2)
$$\sigma = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Während das Vertheilungsgesetz der Normalspannungen ein ziemlich einfaches ist und sich durch die Fläche der Normalspannungen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \pm 1$$

darstellen lässt, welche man erhält, wenn man auf der Richtung der Normalspannung σ die Strecke $1/\sqrt{\pm \sigma}$ vom Mittelpunkt aufträgt, ist das Vertheilungsgesetz der Schubspannungen nicht so durchsichtig. Insbesondere hat sich hinsichtlich der Grösse der Schubspannungen in viele Lehrbücher der Elasticität der Irrthum eingeschlichen, dass es *drei grösste Schubspannungen*, die sogenannten Hauptschubspannungen gebe, welche die Grössen

$$\pm \frac{B-C}{2}, \quad \pm \frac{C-A}{2}, \quad \pm \frac{A-B}{2}$$

besitzen und in den Ebenen liegen, welche die Räume zwischen den Hauptspannungsebenen halbiren.

Vorliegende Arbeit hat den Zweck, ein mathematisches Bild der Vertheilung der Schubspannungen, ihrer Grösse und Richtung nach, zu geben und hiermit oberwähnten Irrthum aufzuklären.

2. Die in der Ebene $\alpha\beta\gamma$ wirkende Schubspannung τ hat die in die Richtungen der Hauptspannungen ABC fallenden Componenten

$$\tau_x = p_x - \sigma \cos \alpha, \quad \tau_y = p_y - \sigma \cos \beta, \quad \tau_z = p_z - \sigma \cos \gamma.$$

Es ist somit nach (1) und (2)

$$\tau_x = (A - \sigma) \cos \alpha = [(A - B) \cos^2 \beta + (A - C) \cos^2 \gamma] \cdot \cos \alpha.$$

Führt man die Bezeichnungen ein

$$(3) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \xi, & \cos \beta = \eta, & \cos \gamma = \zeta; \\ B - C = a, & C - A = b, & A - B = c, \end{cases}$$

so bestehen die Identitäten

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$(5) \quad a + b + c = 0.$$

Hierbei soll an der Annahme festgehalten werden, dass

$$(6) \quad \begin{cases} \text{somit} & A > C > B, \\ & a < 0, \quad b < 0, \quad c > 0. \end{cases}$$

Dadurch gewinnt obiger Ausdruck für τ_x die Form

$$(7) \quad \begin{cases} \text{und ebenso} & \tau_x = \xi(c\eta^2 - b\zeta^2), \\ & \tau_y = \eta(a\zeta^2 - c\xi^2), \\ & \tau_z = \zeta(b\xi^2 - a\eta^2). \end{cases}$$

Die gesammte Schubspannung τ wird

$$(8) \quad \begin{cases} \tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 \\ = \xi^2 (c \eta^2 - b \zeta^2)^2 + \eta^2 (a \zeta^2 - c \xi^2)^2 + \zeta^2 (b \xi^2 - a \eta^2)^2, \end{cases}$$

oder mit Berücksichtigung von (4) und (5):

$$(9) \quad \tau^2 = a^2 \eta^2 \zeta^2 + b^2 \zeta^2 \xi^2 + c^2 \xi^2 \eta^2.$$

3. Jeder Ebene des betrachteten Punktes O eines festen Körpers entspricht eine ganz bestimmte in ihr liegende Gerade als Schubspannungsrichtung.

Nennt man $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten jener Ebene und bezeichnet man die Coordinaten xyz des Schnittpunktes der Schubspannung mit einer um O beschriebenen Kugel vom Halbmesser Eins als Coordinaten der Schubspannungsrichtung, so ist die Zuordnung der Ebene und der in ihr liegenden Schubspannungsrichtung durch die Gleichung definirt:

$$(10) \quad x:y:z = \xi(c\eta^2 - b\zeta^2) : \eta(a\zeta^2 - c\xi^2) : \zeta(b\xi^2 - a\eta^2),$$

wobei

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Um umgekehrt zu jeder Schubspannungsrichtung xyz die zugeordnete Spannungsebene zu finden, beachte man die Gleichungen

$$(11) \quad \begin{cases} x\xi + y\eta + z\zeta = 0, \\ \frac{ax}{\xi} + \frac{by}{\eta} + \frac{cz}{\zeta} = 0, \end{cases}$$

von denen erstere aussagt, dass die Schubspannungsrichtung in der Spannungsebene liegt, die zweite aber eine Folge der Gleichung (10) ist; die Elimination von ζ bez. η liefert die Gleichungen

$$(12) \quad \begin{cases} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 + \frac{\eta}{\xi} \cdot \frac{ax^2 + by^2 - cz^2}{axy} + \frac{b}{a} = 0, \\ \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^2 + \frac{\zeta}{\xi} \cdot \frac{ax^2 - by^2 + cz^2}{axx} + \frac{c}{a} = 0, \end{cases}$$

woraus die Beziehung folgt:

$$(13) \quad \begin{cases} \xi:\eta:\zeta = \frac{x}{(c-b)x^2 - by^2 + cz^2 \pm \delta} : \frac{y}{(a-c)y^2 - cx^2 + az^2 \pm \delta} \\ \quad : \frac{z}{(b-a)z^2 - ax^2 + by^2 \pm \delta}, \end{cases}$$

worin

$$\begin{aligned}\delta^2 &= -(x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c})(-x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c}) \\ &\quad (x\sqrt{a} - y\sqrt{b} + z\sqrt{c})(x\sqrt{a} + y\sqrt{b} - z\sqrt{c}) \\ &= a^2 x^4 + b^2 y^4 + c^2 z^4 - 2bcy^2 z^2 - 2caz^2 x^2 - 2abx^2 y^2.\end{aligned}$$

Diese Grösse δ^2 kann nur positiv sein; nur für zwei reelle Schubspannungsrichtungen wird sie Null, nämlich wenn gleichzeitig

$$(14) \quad z = 0, \quad x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} = 0$$

erfüllt sind. Hierbei ist auf Bedingung (6) Rücksicht genommen worden.

Die in (13) niedergelegte Beziehung gestattet, zu jeder Schubspannungsrichtung xyz die zugeordnete Spannungsebene $\xi\eta\zeta$ zu finden. Wegen des Doppelzeichens von δ entsprechen jeder Schubspannungsrichtung zwei durch sie gehende Spannungsebenen.

Nennt man η_1/ξ_1 und η_2/ξ_2 , ζ_1/ξ_1 und ζ_2/ξ_2 die Wurzelwerthe der Gleichungen (12), so ist

$$\frac{\eta_1 \eta_2}{\xi_1 \xi_2} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\xi_1 \xi_2} = \frac{c}{a}$$

und somit wegen $a + b + c = 0$

$$\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 = 0,$$

d. h.: die beiden Spannungsebenen, welche derselben Schubspannungsrichtung zugeordnet sind, stehen aufeinander senkrecht. Die Zuordnung von Schubspannung und Spannungsebene ist demnach eine ein—zweideutige.

4. Alle Schubspannungsrichtungen xyz , welche ein in der Ebene $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ liegendes Strahlenbüschel bilden, erfüllen die Gleichung

$$x\xi_0 + y\eta_0 + z\zeta_0 = 0.$$

Die ihnen zugeordneten Spannungsebenen $\xi\eta\zeta$ werden somit der Gleichung genügen

$$\xi_0 \xi (c\eta^2 - b\zeta^2) + \eta_0 \eta (a\zeta^2 - c\xi^2) + \zeta_0 \zeta (b\xi^2 - a\eta^2) = 0,$$

bilden also eine Kegelfläche dritter Klasse. Die gegebene Ebene $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ gehört dieser Kegelfläche an.

Für $\xi_0 = 1$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$ geht die Gleichung der Kegelfläche über in

$$\xi(c\eta^2 - b\zeta^2) = 0.$$

Die Fläche zerfällt also in die drei Geraden

$$\xi = 0, \quad \eta\sqrt{c} = \pm \zeta\sqrt{b},$$

von denen jedoch bei Berücksichtigung der Bedingung (6) nur die erste reell ist.

Hieraus folgt: Alle Schubspannungsrichtungen, welche in die Hauptspannungsebene BC fallen, gehören zu Ebenen, welche durch die Hauptspannung A gehen und zur Hauptspannungsebene BC selbst. Dasselbe gilt analog für die beiden anderen Hauptspannungsebenen AB und CA . Doch ist Folgendes bemerkenswerth:

Für $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 1$ werden alle drei Geraden, in welche die Kegelfläche zerfällt,

$$\zeta = 0, \quad \xi\sqrt{b} \pm \eta\sqrt{a} = 0,$$

reell, weil $a < 0$, $b < 0$ angenommen wurde.

Die durch die letzte Gleichung dargestellten, in der Hauptspannungsebene AB liegenden Geraden wollen wir die *Hauptschublinien* des Punktes O nennen; sie besitzen die Eigenschaft, Schubspannungsrichtung jeder durch sie gelegten Ebene zu sein.

5. Alle Spannungsebenen, welche ein Ebenenbüschel mit der Axe $x_0 y_0 z_0$ bilden, erfüllen die Gleichung

$$\xi x_0 + \eta y_0 + \zeta z_0 = 0$$

und ausserdem die Gleichungen (11)

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

$$\frac{ax}{\xi} + \frac{by}{\eta} + \frac{cz}{\zeta} = 0,$$

wenn xyz die Coordinaten der zu den Ebenen $\xi\eta\zeta$ des Büschels gehörigen Schubspannungsrichtungen sind.

Die Elimination von $\xi\eta\zeta$ aus obigen Gleichungen liefert

$$ax(x_0 z - z_0 x)(y_0 x - x_0 y) + by(y_0 x - x_0 y)(z_0 y - y_0 z) \\ + cz(z_0 y - y_0 z)(x_0 z - z_0 x) = 0.$$

Durch diese Gleichung wird eine Kegelfläche dritten Grades dargestellt, welche der Ort aller Schubspannungen ist, deren Spannungsebenen das Büschel mit der Axe $x_0 y_0 z_0$ bilden. Diese Axe gehört dem Kegel als Doppelerzeugende an.

Für $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ geht die Gleichung des Kegels über in $xy z = 0$ und somit zerfällt er in die drei Hauptspannungsebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

d. h. alle durch eine Hauptspannung A gehenden Spannungsebenen haben ihre Schubspannungsrichtung im Schnitte mit der Hauptspannungsebene BC ; nur in den Hauptspannungsebenen CA und AB wird die Richtung der Schubspannung unbestimmt. Analoges gilt von den Ebenenbüscheln mit den Axen B oder C .

Für

$$x_0 \sqrt{a} \pm y_0 \sqrt{b} = 0$$

geht die Gleichung der Kegelfläche über in

$$z(x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} + z\sqrt{c})(x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} - z\sqrt{c}) = 0$$

und der Kegel zerfällt in je drei Ebenen, von denen aber nur eine, nämlich

$$z = 0,$$

reell ist. Es sind somit die beiden durch die Gleichungen (14)

$$z = 0, \quad x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} = 0$$

dargestellten, in der Hauptspannungsebene AB liegenden Geraden Schubspannungsrichtungen aller durch sie gehenden Spannungsebenen. Wir finden in ihnen die im vorigen Abschnitte besprochenen *Hauptschublinien* wieder.

6. Von Wichtigkeit für die Zuordnung der Spannungsebenen und Schubspannungsrichtungen ist die Schaar der Kegelflächen zweiten Grades, welche durch die Gleichung ausgedrückt wird:

$$(15) \quad F = \frac{x^2}{k+b-c} + \frac{y^2}{k+c-a} + \frac{z^2}{k+a-b} = 0,$$

worin k einen veränderlichen Parameter bedeutet. Drückt man die Gleichung dieser Schaar in Ebenencoordinaten aus, so lautet sie:

$$(16) \quad \Phi = \xi^2(k+b-c) + \eta^2(k+c-a) + \zeta^2(k+a-b) = 0$$

und der veränderliche Parameter k nimmt wegen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

die Form an

$$(17) \quad k = (c - b)\xi^2 + (a - c)\eta^2 + (b - a)\zeta^2.$$

Die Berührungserzeugende des durch Gleichung (16) dargestellten Kegels zweiter Klasse hat die Gleichung

$$\begin{aligned} x:y:z &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} : \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} : \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \\ &= \xi(k + b - c) : \eta(k + c - a) : \zeta(k + a - b), \end{aligned}$$

oder wenn k mit Benutzung von (17) eliminirt wird:

$$x:y:z = \xi(c\eta^2 - b\zeta^2) : \eta(a\zeta^2 - c\xi^2) : \zeta(b\xi^2 - a\eta^2).$$

Diese Gleichung stimmt mit jener der Schubspannungsrichtung (10) überein.

Die durch Gleichung (15) oder (16) dargestellten Kegelflächen besitzen also die Eigenschaft, dass jeder ihrer Berührungsebenen die Berührungserzeugende als Schubspannungsrichtung entspricht und umgekehrt jeder Erzeugenden die Berührungsebene als Spannungsebene zugehört.

Die Kegelflächen zweiten Grades

$$F = \frac{x^2}{k + b - c} + \frac{y^2}{k + c - a} + \frac{z^2}{k + a - b} = 0$$

sind confocal, denn die Differenzen je zweier Nenner sind constant; die Focallinien dieser Kegel sind

$$x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} = 0,$$

also die bereits besprochenen Hauptschublinien.

Der Gleichung $F = 0$ wird genügt, wenn für

$$k = c - b, \quad x = 0, \quad y\sqrt{a} \pm z\sqrt{c} = 0 \text{ (imaginär)}$$

$$k = a - c, \quad y = 0, \quad z\sqrt{c} \pm x\sqrt{a} = 0 \text{ (imaginär)}$$

$$k = b - a, \quad z = 0, \quad x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} = 0 \text{ (reell, Fokallinie).}$$

Die Kegelfläche reducirt sich demnach für $k = c - b$ und $k = a - c$ auf die Hauptspannungsebenen CB , bez. AC , für $k = b - a$ auf die Hauptspannungsebene BA und die beiden Fokallinien. Fig. 1 stellt den Schnitt dieser Schaar confocaler Kegel mit einer concentrischen Kugel dar. OF ist eine der beiden Fokallinien.

Jede Gerade OM ist der Schnitt zweier confocaler Kegel-
flächen der Schaar $F = 0$; ihre Berührungsebenen längs der
Erzeugenden OM sind zu einander orthogonal; sie sind die
zu OM als Schubspannungsrichtung gehörenden Spannungs-
ebenen (vgl. Abschnitt 3, Schluss).

Alle Ebenen, welche durch eine der beiden Fokallinien
gehen, haben in dieser die Richtung ihrer Schubspannung
(vgl. Abschnitt 4 und 5).

Alle Geraden, welche in einer der Hauptspannungsebenen
liegen, haben in dieser und in der dazu senkrechten die zu-
gehörigen Spannungsebenen (vgl.
Abschnitt 4).

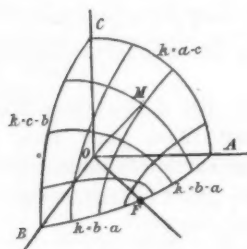


Fig. 1.

7. Die bisherige Unter-
suchung hat sich nur mit der
Richtung der Schubspannung
beschäftigt. Um über die Grösse
derselben und insbesondere über
die Vertheilungen der Schub-
spannungen im Raume Kenntniss
zu erlangen, bediene man sich
folgenden geometrischen Bildes.

Die Schubspannung τ einer
durch den betrachteten Punkt O gehenden Ebene $\xi\eta\zeta$ hat
nach (9) den Werth

$$\tau^2 = a^2 \eta^2 \zeta^2 + b^2 \zeta^2 \xi^2 + c^2 \xi^2 \eta^2.$$

Trägt man auf der Normale dieser Ebene die Strecke

$$(18) \quad \varrho = ON = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

auf, so sind die Coordinaten des Punktes N in Bezug auf die
Hauptspannungsebenen

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{\tau}}, \quad y = \frac{\eta}{\sqrt{\tau}}, \quad z = \frac{\zeta}{\sqrt{\tau}}$$

und der geometrische Ort der Punkte N ist durch die Gleichung
definiert

$$(19) \quad a^2 y^2 z^2 + b^2 z^2 x^2 + c^2 x^2 y^2 = 1.$$

Diese Gleichung stellt eine Fläche vierter Ordnung dar, die wir als *Schubspannungsfläche* bezeichnen wollen. Sie gibt ein gutes Bild der Vertheilung der Schubspannungen und hat ziemlich einfache Gestalt. Ihre Schnitte mit den Hauptspannungsebenen BC , CA , AB des Punktes O sind die Paare gleichseitiger Hyperbeln

$$ayz = \pm 1, \quad bzx = \pm 1, \quad cxy = \pm 1,$$

deren Asymptoten die Hauptspannungen sind.

Fig. 2 stellt einen Octanten dieser Fläche mit obigen Hauptschnitten und den drei Diagonalschnitten mit den Ebenen

$$y = z, \quad z = x, \quad x = y$$

dar. Diese Diagonalschnitte setzen in den Scheiteln $\alpha\beta\gamma$ der gleichseitigen Hyperbeln normal zu den Hauptebenen BC , CA , AB ein, durchlaufen jede einen Wendepunkt und nähern sich den Hauptspannungsachsen A , B , C asymptotisch.

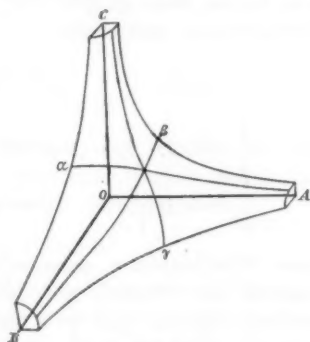


Fig. 2.

Die Punkte $\alpha\beta\gamma$ sind hyperbolische Punkte der Fläche.

Die unendlich fernen Punkte der Hauptspannungsachsen gehören der Fläche an; ihnen entsprechen die Schubspannungen der Hauptspannungsebenen, welche also nach dem Reciprocitätsgesetze (18) gleich Null sind.

8. Von grösster Wichtigkeit ist die Entscheidung der Frage, welche Punkte der Schubspannungsfläche dem Punkte O am nächsten liegen, denn ihnen entspricht der grösste Werth der Schubspannung.

Es ist demnach die Function

$$\frac{1}{r} = \overline{ON}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

zu einem Minimum zu machen unter Einhaltung der Bedingung

$$(19) \quad a^2 y^2 z^2 + b^2 z^2 x^2 + c^2 x^2 y^2 = 1.$$

Die hieraus folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x dx + y dy + z dz &= 0 \\ (b^2 z^2 + c^2 y^2) \cdot x dx + (c^2 x^2 + a^2 z^2) \cdot y dy + (a^2 y^2 + b^2 x^2) z dz &= 0 \end{aligned}$$

erfordern die Erfüllung der weiteren Bedingung

$$(20) \quad x : y : z = x(b^2 z^2 + c^2 y^2) : y(c^2 x^2 + a^2 z^2) : z(a^2 y^2 + b^2 x^2).$$

Den beiden Bedingungen (19) und (20) wird durch folgende Werthsysteme entsprochen:

$$(21) \quad \begin{cases} x = 0, & y = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}, & z = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}; \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{b}}, & y = 0, & z = \pm \frac{1}{\sqrt{b}}; \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{c}}, & y = \pm \frac{1}{\sqrt{c}}, & z = 0. \end{cases}$$

Diese Werthsysteme entsprechen den zwölf hyperbolischen Punkten der Fläche, von denen $\alpha\beta\gamma$ in Fig. 2 angedeutet wurden. Hierin sind abc dem absoluten Werthe nach zu nehmen. Aber nur in den durch das letzte Werthsystem dargestellten Punkten γ wird die Function $1/\tau$ wirklich ein Minimum. Um dies zu zeigen, soll hier eine Betrachtung angewendet werden, die jener von Dupin für die Art der Berührung einer Fläche durch eine Ebene verwandt ist.

Transformirt man die Gleichung der Schubspannungsfläche (19) auf ein Coordinatensystem, welches den Punkt γ zum Anfangspunkt, die Gerade $O\gamma$ zur x -Axe hat, während die Z -Axe ihre Richtung beibehält, so geht die Gleichung der Fläche über in

$$2 a^2 z^2 (m + x + y)^2 + 2 b^2 z^2 (m + x - y)^2 + c^2 (m + x - y)^2$$

$$(m + x + y)^2 = 4,$$

worin

$$m = O\gamma = \sqrt{\frac{2}{c}}.$$

Eine Kugel, die ihren Mittelpunkt in O hat und einen Radius besitzt, der nur um eine sehr geringe Strecke Δm grösser ist wie m , besitzt die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2m(\Delta m - x),$$

wenn die zweite Potenz von Δm vernachlässigt wird.

In nächster Nähe des Punktes γ dürfen, da die YZ -Ebene die Fläche in γ berührt, die Coordinaten y und z als sehr kleine Grössen erster Ordnung, die Coordinaten x als sehr kleine Grössen zweiter Ordnung angesehen werden; mit Vernachlässigung der Grössen höherer Ordnung kann somit die Gleichung der Fläche geschrieben werden

$$2mc^2x - c^2y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = 0$$

und ebenso die Gleichung der Kugel

$$y^2 + z^2 = 2m(\Delta m - x).$$

Der Schnitt dieser beiden Flächen, der mit Dupin als Indicatrix der Berührung in γ bezeichnet werden kann, ist eine der Berührungsebene YZ parallel liegende Curve

$$c^2y^2 + abz^2 = c^2m\Delta m.$$

Sie ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem a und b gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben; nur in ersterem Falle, bei elliptischer Berührung der Kugel und der Fläche, kann von einem Minimum der Function $1/\tau^2$ gesprochen werden.

Nun ist unserer Annahme (6) gemäss

$$a < 0, \quad b < 0, \quad c > 0,$$

es kann demnach nur in γ ein Minimum der Function $1/\tau^2$ eintreten, nicht aber in α oder β .

9. Die drei Schubspannungen

$$\tau_1 = \frac{1}{O\alpha^2} = \pm \frac{a}{2} = \pm \frac{B-C}{2},$$

$$\tau_2 = \frac{1}{O\beta^2} = \pm \frac{b}{2} = \pm \frac{C-A}{2},$$

$$\tau_3 = \frac{1}{O\gamma^2} = \pm \frac{c}{2} = \pm \frac{A-B}{2},$$

deren Grössen man erhält, wenn man die Werthsysteme (21) in

$$\tau = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

substituirt, wirken in Ebenen, welche senkrecht sind zu $O\alpha$, bez. $O\beta$ und $O\gamma$. Man hat sie *Hauptschubspannungen* genannt und in vielen Lehrbüchern der Elasticität findet man die irrthümliche Behauptung, dass sie die grössten Schubspannungen des Punktes O sind, während obige Untersuchung gezeigt hat, dass nur eine von ihnen, nämlich

$$(22) \quad \tau_3 = \frac{A - B}{2},$$

die grösste Schubspannung des Punktes O ist; dieselbe soll auch ferner als *Hauptschubspannung* bezeichnet werden.

Die beiden anderen spielen eine sehr untergeordnete Rolle, etwa dieselbe, wie die mittlere C der drei Hauptspannungen

$$A > C > B.$$

Ebenso wie es niemand einfällt, diese Spannung C als eine der grössten oder eine der kleinsten Spannungen des Punktes O zu bezeichnen, sollte es künftighin auch unterbleiben, dreier grösster Schubspannungen Erwähnung zu thun.

Allerdings ist es nicht ganz einfach, sich ein richtiges Bild von der Gruppierung der Schubspannungen des Punktes O zu verschaffen.

Am besten kommt man noch immer an dieses Ziel, wenn man auf der Schubspannungsfläche (Fig. 2) alle jene Punkte aufsucht, die denselben Abstand von O besitzen und diese Punkte von O aus durch eine Kegelfläche projicirt. Auf diese Weise gelangt man zu den Orten gleicher Schubspannungen, welche die Gleichung besitzen

$$(23) \quad a^2 y^2 z^2 + b^2 z^2 x^2 + c^2 x^2 y^2 = \tau^2 (x^2 + y^2 + z^2)^3,$$

worin τ , die Schubspannung, als veränderlicher Parameter dieser Schaar von Kegelflächen angesehen werden kann.

Ertheilt man τ alle Werthe von Null an:

$$0 \dots \tau_1 \dots \tau_2 \dots \tau_3,$$

so erhält man alle Kegelflächen gleicher Schubspannungen, wie sie in Fig. 3 durch ihren Schnitt mit einer concentrischen Kugelfläche für einen Octanten dargestellt sind.

Für $\tau = 0$ zerfällt der Kegel gleicher Schubspannungen in die drei Hauptspannungsachsen A, B, C . Für $\tau = \tau_1 = \pm a/2$ besitzt die Kegelfläche in

$$x = 0, \quad y = \pm z$$

zwei in BC gelegene Doppellinien, von denen $O\alpha$ die eine ist, und schneidet die beiden anderen Hauptspannungsebenen CA, AB in je vier Geraden

$$\begin{aligned} \text{bez.} \quad y = 0, \quad az = \pm x(b \pm \sqrt{b^2 - a^2}) \\ z = 0, \quad ay = \pm x(c \pm \sqrt{c^2 - a^2}), \end{aligned}$$

welche alle reell sind unter der Voraussetzung

$$(24) \quad |a| < |b| < |c|$$

und symmetrisch liegen zu $O\beta$ bez. $O\gamma$.

Für $\tau = \tau_2 = \pm b/2$ besitzt die Kegelfläche in

$$y = 0, \quad z = \pm x$$

zwei in CA gelegene Doppellinien, von denen $O\beta$ die eine ist und schneidet die Hauptspannungsebene AB in vier Geraden

$$z = 0, \quad bx = \pm y(c \pm \sqrt{c^2 - b^2}),$$

welche unter gleicher Voraussetzung

(24) reell sind und symmetrisch zu $O\gamma$

liegen, während die Hauptspannungsebene BC in vier imaginären Geraden getroffen wird.

Für $\tau = \tau_3 = \pm c/2$ schrumpft der Kegel in die beiden Geraden

$$z = 0, \quad x = \pm y$$

ein, von denen $O\gamma$ die eine ist.

Für grössere Werthe von τ wird die Kegelfläche imaginär.

Aus dieser Betrachtung und insbesondere aus Fig. 3 geht sehr klar hervor, dass es durchaus nicht gestattet ist, von τ_1 und τ_2 als grössten Schubspannungen zu sprechen, da der ganze einfach schraffierte Raum des Kugeloctanten Schubspannungen angehört, die zwischen τ_1 und τ_2 liegen und der

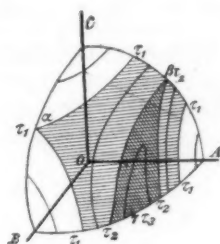


Fig. 3.

ganze doppelt schraffierte Raum Schubspannungen, die zwischen τ_2 und τ_3 liegen.

10. Die Schubspannungen aller Ebenen eines Ebenenbündels, dessen Axe die Richtungscoefficienten lmn besitzt, erfüllen nach Abschnitt 5 eine Kegelfläche dritten Grades. Die Grössen aller dieser Schubspannungen ergeben sich im Schnitte der zur Axe des Ebenenbündels senkrechten Ebene

$$E = lx + my + nz = 0$$

mit der Schubspannungsfläche

$$F = a^2 y^2 z^2 + b^2 z^2 x^2 + c^2 x^2 y^2 = 1.$$

Transformirt man letztere Gleichung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen XYZ die Richtungscoefficienten

$$l, m, n; l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2$$

besitzen, dann wird E zur Coordinatenebene YZ und ihr Schnitt mit der Fläche F nimmt die Gleichung an:

$$a^2(m_1 y + m_2 z)^2(n_1 y + n_2 z)^2 + b^2(n_1 y + n_2 z)^2(l_1 y + l_2 z)^2 + c^2(l_1 y + l_2 z)^2(m_1 y + m_2 z)^2 = 1.$$

Wählt man hier

$$l_1 = \frac{l(c m^2 - b n^2)}{r_0}, \quad m_1 = \frac{m(a n^2 - c l^2)}{r_0}, \quad n_1 = \frac{n(b l^2 - a m^2)}{r_0},$$

$$l_2 = \frac{a m n}{r_x}, \quad m_2 = \frac{b n l}{r_x}, \quad n_2 = \frac{c l m}{r_x},$$

worin

$$r_x^2 = a^2 m^2 n^2 + b^2 n^2 l^2 + c^2 l^2 m^2,$$

so erscheinen die zwischen den neun Richtungscoefficienten bestehenden Bedingungsbeziehungen

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \text{ etc.}, \quad l^2 + l_1^2 + l_2^2 = 1 \text{ etc.},$$

$$l l_1 + m m_1 + n n_1 = 0 \text{ etc.}, \quad l m + l_1 m_1 + l_2 m_2 = 0 \text{ etc.}$$

mit Berücksichtigung der Identität

$$a + b + c = 0$$

erfüllt. Dann hat die Y -Axe die Richtung der zur Ebene E gehörigen Schubspannung τ_x und die Gleichung des Schnittes geht nach einigen Reductionen über in

$$y^4(\tau_x^6 + d^6) + 2 d^3 k \tau_x^2 y^3 z + y^2 z^2 (i^2 \tau_x^4 - 6 d^6) - 2 d^3 k \tau_x^2 y z^3 + d^6 z^4 = \tau_x^4,$$

worin der Abkürzung halber

$$i^2 = a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2$$

$$k = a l^2 + b m^2 + c n^2$$

$$d^3 = a b c l m n$$

gesetzt wurde.

Die auf diese Weise festgelegten Coordinatenebenen XY und XZ sollen *Hauptschubebenen des Büschels* genannt werden.

Für

$$y = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi$$

gesetzt und mit Berücksichtigung, dass nach (18)

$$y^2 + z^2 = \rho^2 = \frac{1}{r}$$

ist, geht obige Gleichung über in

$$(25) \quad \tau^2 = \cos^2 \varphi (\tau_x^2 \cos^2 \varphi + i^2 \sin^2 \varphi) + \frac{d^3}{r^4} \cos 4 \varphi + \frac{k d^3}{2 r_x^2} \sin 4 \varphi.$$

Diese Gleichung liefert die Grösse der Schubspannung für jene Ebene des Büschels, deren Normale mit der Schubspannung τ_x der Normalebene YZ den Winkel φ einschliesst.

Nennt man τ_y und τ_z die Schubspannungen der beiden Hauptschubebenen XZ und XY des Büschels, so folgt aus Gleichung (25) für

$$(26) \quad \begin{cases} \varphi = 0: & \tau_y^2 = \tau_x^2 + \frac{d^3}{r_x^4}, \\ \varphi = 90^\circ: & \tau_z^2 = \frac{d^3}{r_x^4}, \end{cases}$$

somit

$$\tau_y^2 = \tau_z^2 + \tau_x^2.$$

Mit Benutzung von Gleichung (26) geht (25) über in

$$(27) \quad \tau^2 = \cos^2 \varphi (\tau_x^2 \cos^2 \varphi + i^2 \sin^2 \varphi) + \tau_z^2 \cos 4 \varphi + \frac{1}{2} k \tau_x \sin 4 \varphi.$$

11. Die Schubspannung τ_z der Hauptschubebene XY besitzt Richtungscoefficienten, welche nach den Gleichungen (7) im Verhältnisse stehen

$$l_2 (c m_2^2 - b n_2^2) : m_2 (a n_2^2 - c l_2^2) : n_2 (b l_2^2 - a m_2^2),$$

wobei $\xi \eta \zeta$ durch $l_2 m_2 n_2$ ersetzt wurden.

Diese letzteren Richtungscoefficienten der Z -Axe stehen aber nach vorigem Abschnitte im Verhältnisse

$$l_2 : m_2 : n_2 = a m n : b n l : c l m.$$

Hierdurch geht obenstehendes Verhältniss über in

$$l(c m^2 - b n^2) : m(a n^2 - c l^2) : n(b l^2 - a m^2).$$

Dies ist aber das Verhältniss der Richtungscoefficienten der Schubspannung τ_x der Normalebene YZ des Büschels und damit folgt: Die Schubspannungen τ_x und τ_z haben dieselbe Richtung Y (Fig. 4).

12. Die in dieselbe Richtung fallenden Schubspannungen τ_x und τ_z gehören zu zwei aufeinander senkrechten Ebenen YZ und XY , deren Normalen die Richtungscoefficienten $l m n$, $l_2 m_2 n_2$ besitzen (vgl. Abschnitt 3, Schluss).

Nun ist nach (26)

$$\tau_x^2 \tau_z = d^3 = a b c l m n,$$

und ebenso würde man erhalten, wenn die Z -Axe als Träger eines Ebenenbüschels angesehen würde

$$\tau_x \tau_z^2 = a b c l_2 m_2 n_2,$$

woraus sich für die Werthe der in dieselbe Richtung

fallenden Schubspannungen ergibt:

$$\tau_x^3 = a b c \cdot \frac{l^3 m^3 n^3}{l_2 m_2 n_2}, \quad \tau_z^3 = a b c \cdot \frac{l_2^3 m_2^3 n_2^3}{l m n}$$

und

$$\tau_x : \tau_z = l m n : l_2 m_2 n_2.$$

13. Setzt man in Gleichung (27)

$$\varphi' = -\varphi,$$

so geht sie über in

$$\tau'^2 = \cos^2 \varphi (\tau_x^2 \cos^2 \varphi + \tau_z^2 \sin^2 \varphi) + \tau_x^2 \tau_z^2 \cos 4 \varphi - \frac{1}{2} k \tau_x \sin 4 \varphi,$$

somit wird

$$\tau^2 - \tau'^2 = k \tau_x \sin 4 \varphi$$

und im besonderen für $\varphi = \pm 45^\circ$

$$\tau^2 = \tau'^2,$$

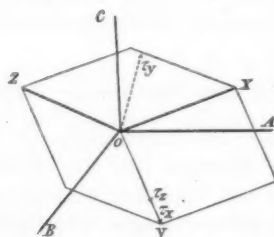


Fig. 4.

d. h.: Jene Ebenen des Büschels, welche gegen die Hauptschubebenen unter $\pm 45^\circ$ geneigt sind, besitzen gleiche Schubspannungen.

14. Nimmt man als Träger des Ebenenbüschels eine der Hauptspannungen z. B. C an, so wird im besonderen

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 1; \quad \tau_x = 0, \quad i^2 = c^2, \quad d = 0$$

und Gleichung (25) wird

$$\tau = \pm c \sin \varphi \cos \varphi.$$

Für die Fokallinien

$$x \sqrt{a} \pm y \sqrt{b} = 0$$

(die wir Schublinien des Punktes genannt haben) als Träger des Ebenenbüschels wird

$$l^2 = -\frac{b}{c}, \quad m^2 = -\frac{a}{c}, \quad n = 0; \quad \tau_x^2 = ab, \quad i^2 = ab, \quad d = 0$$

und Gleichung (25) wird

$$\tau = \pm \sqrt{ab} \cdot \cos \varphi.$$

Da nach Abschnitt 5 alle Ebenen dieses Büschels ihre Schubspannung τ in der Schublinie haben werden, so ist diese die Richtung von unendlich vielen Schubspannungen des Punktes, deren Werthe zwischen 0 und \sqrt{ab} schwanken.

15. Eine Ebene ε des Büschels, welche die Richtungscoefficienten $\xi \eta \zeta$ besitzt, schneidet die Normalebene E des Büschels, deren Richtungscoefficienten $l m n$ sind, in einer Geraden mit den Richtungscoefficienten

$$m \zeta - n \eta, \quad n \xi - l \zeta, \quad l \eta - m \xi.$$

Die Schubspannung τ der Ebene ε besitzt die Richtungscoefficienten

$$\frac{\xi(c\eta^2 - b\zeta^2)}{\tau}, \quad \frac{\eta(a\zeta^2 - c\xi^2)}{\tau}, \quad \frac{\zeta(b\xi^2 - a\eta^2)}{\tau}$$

und ihre Projection τ_E auf die Normalebene E hat somit die Grösse

$$\begin{aligned} \tau_E = & \xi(c\eta^2 - b\zeta^2)(m\zeta - n\eta) + \eta(a\zeta^2 - c\xi^2)(n\xi - l\zeta) \\ & + \zeta(b\xi^2 - a\eta^2)(l\eta - m\xi), \end{aligned}$$

welcher Ausdruck übergeht in

$$(28) \quad \tau_E = -(a l \eta \zeta + b m \zeta \xi + c n \xi \eta).$$

Dieser Werth der Projection der Schubspannung ändert sich nicht, wenn man statt $\xi \eta \zeta$ die Richtungscoefficienten $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ der zu ε senkrechten Ebene ε_1 des Büschels einführt, wenn man das Bestehen der Identitäten

$$\xi l + \eta m + \zeta n = 0,$$

$$\xi_1 l + \eta_1 m + \zeta_1 n = 0,$$

$$\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \zeta \zeta_1 = 0$$

berücksichtigt. Hieraus folgt in Uebereinstimmung mit einem bekannten Satze der Spannungstheorie: *Die Schubspannungen zweier beliebiger Ebenen sind so beschaffen, dass ihre Projectionen auf eine zu ihrer Schnittpunktlinie senkrechte Ebene dieselbe Grösse haben.*

16. Ausser der Richtung der Normalspannung einer Ebene und jener der Schubspannung ist noch die zu diesen beiden senkrechte Richtung bemerkenswerth. Es ist dies jene Gerade der Ebene, längs welcher dieselbe gar keine Spannung erleidet. Wir wollen sie die *spannungslose Gerade der Ebene* nennen.

Jeder Ebene des Punktes O ist eine ganz bestimmte spannungslose Gerade zugeordnet. Nennt man $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten der Spannungsebene, xyz jene der spannungslosen Geraden (vgl. Abschnitt 3), so ist die Zuordnung beider durch die Gleichung defnirt:

$$(29) \quad x:y:z = a\eta\zeta : b\zeta\xi : c\xi\eta,$$

wenn man berücksichtigt, dass die Coordinaten xyz den Gleichungen genügen müssen

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0,$$

$$x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z = 0,$$

worin $\tau_x \tau_y \tau_z$ die durch die Gleichungen (7) gegebenen Componenten der Schubspannung der Ebene sind.

Umgekehrt entspricht jeder spannungslosen Geraden eine bestimmte Ebene, deren Coordinaten im Verhältnisse stehen

$$(30) \quad \xi:\eta:\zeta = ayz : bzx : cxy,$$

wie aus Gleichung (29) mit Beachtung von

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

folgt. *Die Zuordnung von Spannungsebene und spannungsloser Geraden ist somit eine eindeutige.*

17. Alle spannungslosen Geraden xyz , welche ein in der Ebene $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ liegendes Strahlenbüschel bilden, erfüllen die Gleichung

$$x \xi_0 + y \eta_0 + z \zeta_0 = 0.$$

Die zugeordneten Spannungsebenen $\xi \eta \zeta$ werden demnach mit Berücksichtigung der Gleichung (29) die Gleichung zu erfüllen haben

$$a \xi_0 \eta \zeta + b \eta_0 \zeta \xi + c \zeta_0 \xi \eta = 0,$$

d. h. sie bilden eine Kegelfläche zweiter Klasse. Jeder dieser Kegelflächen gehören die Hauptspannungsebenen AB, BC, CA und auch die Ebene des Strahlenbüschels als berührende Ebenen an.

Wählt man als Ebene des Strahlenbüschels eine der Hauptspannungsebenen, z. B. BC , so ist

$$\xi_0 = 1, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0$$

und die Gleichung der Kegelfläche wird

$$\eta \zeta = 0;$$

sie zerfällt also in die beiden Hauptspannungsrichtungen B und C , d. h.: Jede Gerade einer Hauptspannungsebene ist spannungslose Gerade derselben.

Wählt man als Ebene des Strahlenbüschels eine beliebige, durch eine der Hauptspannungen, z. B. A , gehende Ebene E , so ist $\xi_0 = 0$, und die Gleichung der Kegelfläche wird

$$\xi (b \eta_0 \zeta + c \zeta_0 \eta) = 0.$$

Die Kegelfläche zerfällt also in die Hauptspannungsrichtung A und in eine Gerade

$$G = b \eta_0 \zeta + c \zeta_0 \eta = 0,$$

welche in der Hauptspannungsebene BC liegt. Daraus folgt: Die Strahlen des in der Ebene E liegenden Strahlenbüschels sind spannungslose Gerade der Ebenen eines Ebenenbüschels mit der Axe G .

Analoges gilt von den beiden anderen Hauptspannungsrichtungen B und C .

18. Alle Spannungsebenen, welche ein Ebenenbüschel mit der Axe $x_0 y_0 z_0$ bilden, erfüllen die Gleichung

$$x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta = 0.$$

Die zugeordneten spannungslosen Geraden xyz werden, wenn die Gleichung (30) zu Hülfe genommen wird, Erzeugende der Kegelfläche zweiten Grades

$$ax_0yz + by_0zx + cz_0xy = 0$$

sein. Die Hauptspannungsrichtungen sowie die Axe des Ebenenbüschels gehören dieser Kegelfläche an.

Wählt man als Axe des Ebenenbüschels eine der Hauptspannungsrichtungen, z. B. A , so ist

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

und die Gleichung der Kegelfläche

$$yz = 0;$$

sie zerfällt somit in die Hauptspannungsebenen CA und AB . Die Hauptspannungsrichtung A ist demnach spannungslose Gerade für jede durch sie gehende Ebene.

Für eine Gerade G , welche in einer der Hauptspannungsebenen, z. B. BC , liegt, als Axe des Ebenenbüschels ist $x_0 = 0$, und die Kegelfläche wird

$$x(by_0z + cz_0y) = 0,$$

zerfällt also in die Hauptspannungsebene BC und in die Ebene

$$E = by_0z + cz_0y = 0,$$

welche durch die Hauptspannungsrichtung A geht. Daraus folgt: Die Ebenen eines Ebenenbüschels, dessen Axe G in der Hauptspannungsebene BC liegt, haben ihre spannungslosen Geraden im Schnitte mit der Ebene E .

Analoges gilt für die beiden anderen Hauptspannungsebenen CA und AB .

19. Auch die Zuordnung der Spannungsebenen und ihrer spannungslosen Geraden lässt sich, wie dies in Abschnitt 6 für die Schubspannungsrichtungen gezeigt wurde, durch eine Schaar von Kegelflächen darstellen. Dieselben besitzen die Gleichung

$$(31) \quad x^a y^b z^c = k,$$

worin

$$a + b + c = 0,$$

$$a < 0, \quad b < 0, \quad c > 0$$

und k den veränderlichen Parameter bedeutet.

Die Berührungsebene

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z = 0$$

einer dieser Kegelflächen längs der Erzeugenden $x_1 y_1 z_1$ besitzt die Gleichung

$$a y_1 z_1 x + b z_1 x_1 y + c x_1 y_1 z = 0$$

und es besteht somit die Relation

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = a y_1 z_1 : b z_1 x_1 : c x_1 y_1,$$

welche mit (30) übereinstimmt. Diese Kegelflächen besitzen somit die Eigenschaft, dass jede Erzeugende derselben spannungslose Gerade ihrer berührenden Ebene ist.

Die Schnitte dieser Kegelflächen mit einem Kugeloctanten von gleichem Mittelpunkt sind in Fig. 5 dargestellt. Schreibt man die Gleichung (31) in der Form

$$z^c = k x^{-a} y^{-b},$$

so sind die Exponenten durchweg positiv und es ist mit Rücksicht auf

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ersichtlich:

Für $k = 0$ ist die Kegelfläche die Ebene AB ;

für $k = 1$ geht die Kegelfläche durch den Punkt

$$x = y = z;$$

für $k = \infty$ zerfällt die Kegelfläche in die Ebenen BC und CA .

Die Geraden A und B gehören allen Kegelflächen als Erzeugende an, die Gerade C nur einer derselben.

Die gegen die Ebene AB am stärksten geneigten Erzeugenden aller Kegelflächen liegen in den Ebenen, die zu den beiden Hauptschublinien (Fokallinien)

$$x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} = 0$$

senkrecht stehen. Diese Ebenen sind die Orte aller spannungslosen Geraden jener Ebenen, welche durch die Hauptschub-

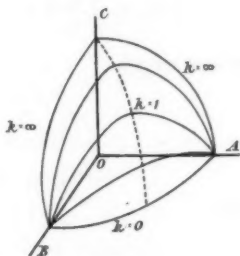


Fig. 5.

linien gehen. Der Schnitt einer dieser Ebenen mit dem Kugeloctanten ist in Fig. 5 durch eine punktirte Linie angedeutet.

20. Die spannungslosen Geraden dreier aufeinander senkrechten Ebenen des Punktes O liegen in einer Ebene.

Denn sind $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ die Schubspannungen dieser drei Ebenen, $\xi_1 \eta_1 \zeta_1, \xi_2 \eta_2 \zeta_2, \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ die Coordinaten der letzteren, so sind die Coordinaten der spannungslosen Geraden

$$(32) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{a \eta_1 \zeta_1}{\tau_1}, & y_1 = \frac{b \zeta_1 \xi_1}{\tau_1}, & z_1 = \frac{c \xi_1 \eta_1}{\tau_1}, \\ x_2 = \frac{a \eta_2 \zeta_2}{\tau_2}, & y_2 = \frac{b \zeta_2 \xi_2}{\tau_2}, & z_2 = \frac{c \xi_2 \eta_2}{\tau_2}, \\ x_3 = \frac{a \eta_3 \zeta_3}{\tau_3}, & y_3 = \frac{b \zeta_3 \xi_3}{\tau_3}, & z_3 = \frac{c \xi_3 \eta_3}{\tau_3}, \end{cases}$$

woraus wegen

$$\eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2 + \eta_3 \zeta_3 = 0,$$

$$\zeta_1 \xi_1 + \zeta_2 \xi_2 + \zeta_3 \xi_3 = 0,$$

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 = 0$$

folgt:

$$\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \tau_3 x_3 = 0,$$

$$\tau_1 y_1 + \tau_2 y_2 + \tau_3 y_3 = 0,$$

$$\tau_1 z_1 + \tau_2 z_2 + \tau_3 z_3 = 0.$$

Es ist somit

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

womit obige Behauptung bewiesen ist.

Die Gleichung der Ebene, in welcher die spannungslosen Geraden dreier aufeinander senkrechten Ebenen liegen, ist

$$(33) \quad b c \xi_1 \xi_2 \xi_3 x + c a \eta_1 \eta_2 \eta_3 y + a b \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 z = 0.$$

21. Drei Spannungsebenen, deren spannungslose Gerade aufeinander senkrecht stehen, gehen durch dieselbe Gerade.

Denn die Umkehrung der Beziehungen (32) liefert für die Coordinaten dieser drei Spannungsebenen

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{a y_1 z_1}{\sigma_1}, & \eta_1 &= \frac{b x_1 z_1}{\sigma_1}, & \zeta_1 &= \frac{c x_1 y_1}{\sigma_1}, \\ \xi_2 &= \frac{a y_2 z_2}{\sigma_2}, & \eta_2 &= \frac{b x_2 z_2}{\sigma_2}, & \zeta_2 &= \frac{c x_2 y_2}{\sigma_2}, \\ \xi_3 &= \frac{a y_3 z_3}{\sigma_3}, & \eta_3 &= \frac{b x_3 z_3}{\sigma_3}, & \zeta_3 &= \frac{c x_3 y_3}{\sigma_3},\end{aligned}$$

worin

$$\sigma_1 = \frac{a b c \xi_1 \eta_1 \zeta_1}{r_1^3}, \quad \sigma_2 = \frac{a b c \xi_2 \eta_2 \zeta_2}{r_2^3}, \quad \sigma_3 = \frac{a b c \xi_3 \eta_3 \zeta_3}{r_3^3}.$$

Hieran lassen sich aber dieselben Folgerungen schliessen wie im vorigen Abschnitt.

Die Gleichung der Geraden, in welcher sich die drei Spannungsebenen schneiden, ist

$$(34) \quad b c x_1 x_2 x_3 \xi + c a y_1 y_2 y_3 \eta + a b z_1 z_2 z_3 \zeta = 0.$$

22. Ist

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi_1, & y_1 &= \eta_1, & z_1 &= \zeta_1, \\ x_2 &= \xi_2, & y_2 &= \eta_2, & z_2 &= \zeta_2, \\ x_3 &= \xi_3, & y_3 &= \eta_3, & z_3 &= \zeta_3,\end{aligned}$$

so wird in den Gleichungen (33) und (34) auch

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

d. h.: Wählt man in O ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, so sind die Axen desselben spannungslose Gerade dreier Ebenen, die sich in einer Geraden G schneiden; hingegen sind die Coordinatenebenen Spannungsebenen dreier spannungsloser Geraden, die in einer Ebene E liegen; G und E stehen aufeinander senkrecht.

23. Sind wie in Abschnitt 20 $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ die Schubspannungen dreier aufeinander senkrechter Ebenen $E_1 E_2 E_3$ und deren Coordinaten $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$, $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$, so gilt nach Gleichung (9)

$$\begin{aligned}\tau_1^2 &= a^2 \eta_1^2 \zeta_1^2 + b^2 \zeta_1^2 \xi_1^2 + c^2 \xi_1^2 \eta_1^2, \\ \tau_2^2 &= a^2 \eta_2^2 \zeta_2^2 + b^2 \zeta_2^2 \xi_2^2 + c^2 \xi_2^2 \eta_2^2, \\ \tau_3^2 &= a^2 \eta_3^2 \zeta_3^2 + b^2 \zeta_3^2 \xi_3^2 + c^2 \xi_3^2 \eta_3^2.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass

$$\begin{aligned}\eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2 + \eta_3 \zeta_3 &= 0, \\ \zeta_1 \xi_1 + \zeta_2 \xi_2 + \zeta_3 \xi_3 &= 0, \\ \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 &= 0,\end{aligned}$$

so erhält man aus obigen Gleichungen

$$\tau_3^2 - \tau_1^2 - \tau_2^2 = 2(a^2 \eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2 + b^2 \zeta_1 \zeta_2 \xi_1 \xi_2 + c^2 \xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2).$$

Die spannungslosen Geraden zweier dieser Ebenen $E_1 E_2$ schliessen einen Winkel α_{12} miteinander ein, welcher nach (32)

$$\text{oder} \quad \cos \alpha_{12} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\tau_1 \tau_2 \cos \alpha_{12} = a^2 \eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2 + b^2 \zeta_1 \zeta_2 \xi_1 \xi_2 + c^2 \xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2.$$

Es ist somit

$$\tau_3^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + 2 \tau_1 \tau_2 \cos \alpha_{12}$$

oder auch

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \sin \alpha_{23} : \sin \alpha_{31} : \sin \alpha_{12},$$

d. h.: Die Schubspannungen dreier aufeinander senkrechter Ebenen, auf den spannungslosen Geraden derselben aufgetragen, verhalten sich wie drei im Gleichgewicht befindliche Kräfte.

24. Zum Schlusse soll noch auf einige specielle Fälle hingewiesen werden.

Wenn eine der Hauptspannungen, z. B. B , verschwindet, wenn sich also das Spannungsellipsoid auf eine Spannungsellipse reducirt, so tritt in den Resultaten der vorliegenden Untersuchung gar keine Veränderung ein.

Werden jedoch zwei Hauptspannungen, z. B. B und C , einander gleich, so wird

$$a = B - C = 0, \quad b + c = 0.$$

Von den hierdurch bedingten Vereinfachungen der Resultate seien erwähnt:

Die Schubspannung einer beliebigen Ebene $\xi \eta \zeta$ wird

$$\tau^2 = c^2 \xi^2 (\eta^2 + \zeta^2).$$

Für $\xi = 0$ ist $\tau = 0$, d. h.: Alle durch die Hauptspannung A gehenden Ebenen erleiden keine Schubspannung.

Die in Abschnitt 3 besprochene Zuordnung von je einer Schubspannungsrichtung zu zwei aufeinander senkrechten Spannungsebenen, Gleichung (13), geht wegen

$$\delta = b(y^2 + z^2)$$

über in

$$\xi : \eta : \zeta = x - \frac{1}{x} : y : z \quad \text{für } +\delta,$$

und

$$\xi : \eta : \zeta = 0 : y : z \quad \text{für } -\delta,$$

d. h.: Von den beiden jeder Schubspannungsrichtung zugeordneten Spannungsebenen geht die eine durch die Hauptspannungsrichtung A .

Die im Abschnitt 4 besprochene Kegelfläche dritter Klasse zerfällt in die Gerade $\xi = 0$ und in den Kegel zweiter Klasse

$$\xi_0 (\eta^2 + \zeta^2) = (\eta_0 \eta + \zeta_0 \zeta) \xi,$$

d. h.: Den Strahlen eines beliebigen Strahlenbüschels entsprechen als Spannungsebenen alle durch A gehenden Ebenen und die Berührungsfläche eines Kegels zweiter Klasse, zu denen auch die Hauptspannungsebene BC und die Ebene des Strahlenbüschels gehören.

Die im Abschnitt 5 besprochene Kegelfläche dritten Grades zerfällt in die Ebene $x_0 y = y_0 z$ und in den Kegel zweiten Grades

$$x_0 (y^2 + z^2) = (y_0 y + z_0 z) x,$$

d. h.: Den Ebenen eines beliebigen Ebenenbüschels entsprechen als Schubspannungsrichtungen alle Strahlen des Strahlenbüschels, welches in der durch die Axe des Ebenenbüschels und durch A gehenden Ebene liegt und ausserdem die Erzeugenden eines Kegels zweiten Grades, zu denen auch die Hauptspannungsrichtung A und die Axe des Ebenenbüschels gehören. Die Kreisschnittebenen dieses Kegels stehen senkrecht zur Axe des Ebenenbüschels.

Alle durch A gehenden Ebenen haben demnach unendlich viele Schubspannungsrichtungen.

Jede nicht durch A gehende Ebene hat die ihr gehörende Schubspannungsrichtung in der orthogonalen Projection von A auf die Ebene.

Die im Abschnitt 6 untersuchten confokalen Kegelflächen gehen über in

$$F = \frac{k+c}{k-2c} \cdot x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

sind also Rotationskegel mit der Hauptspannungsrichtung A als Axe. Jede berührende Ebene derselben besitzt in der Berührungserzeugenden die ihr zugeordnete Schubspannungsrichtung.

Die Schubspannungsfläche geht über in die Rotationsfläche

$$c^2 x^2 (y^2 + z^2) = 1$$

mit A als Axe und BC als asymptotischer Ebene. Sie entsteht durch Drehung einer gleichseitigen Hyperbel um eine ihrer Asymptoten.

Die Kegelflächen gleicher Schubspannung sind Rotationskegel mit A als Axe.

Die Hauptschubspannung besitzt die Grösse

$$\pm \frac{A - B}{2},$$

sie tritt in allen Erzeugenden jenes Rotationskegels um A als Axe auf, dessen Oeffnung 90° ist.

Die spannungslosen Geraden aller Ebenen liegen sämmtlich in der Hauptspannungsebene BC .

Nur jene Ebenen, welche durch A gehen, machen eine Ausnahme; für diese ist jede durch O gehende Gerade spannungslos.

Fig. 2.

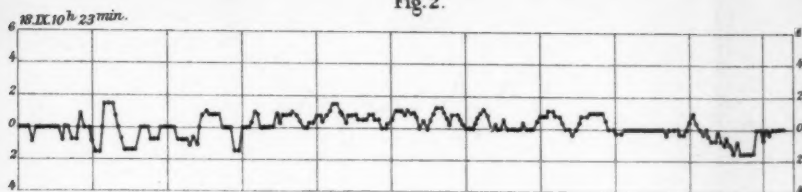


Fig. 1.

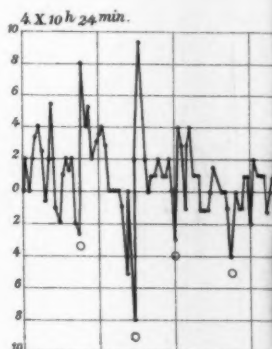
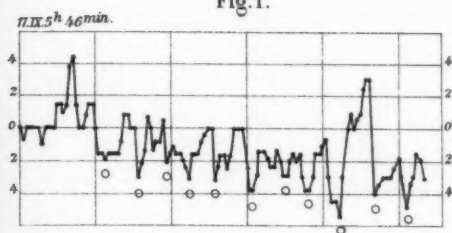


Fig. 6.

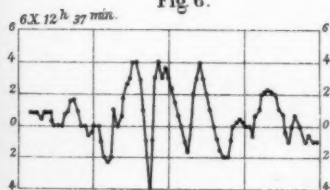
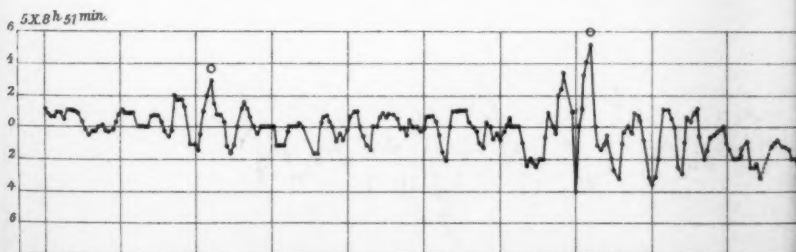
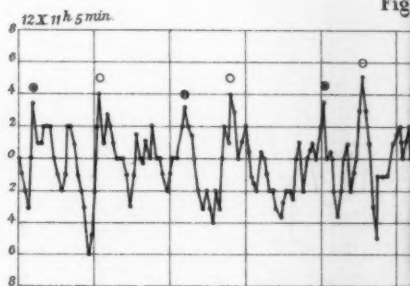


Fig.



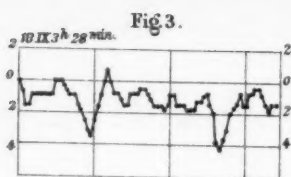
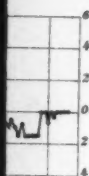


Fig 4.

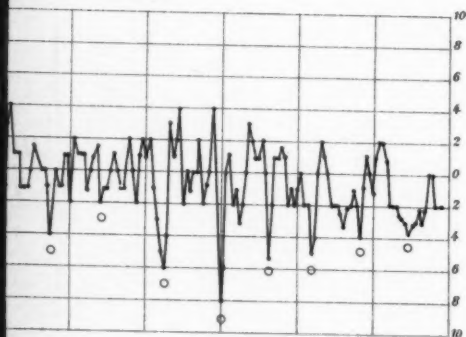


Fig 7.

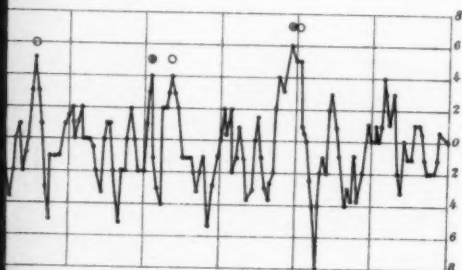
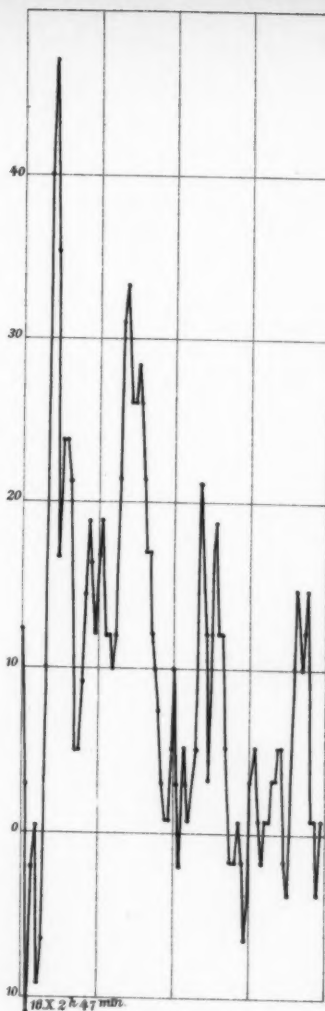
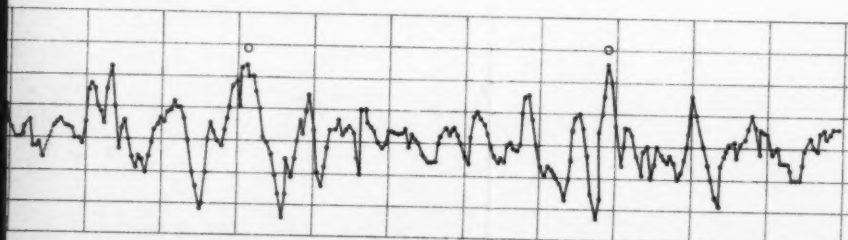


Fig 5.



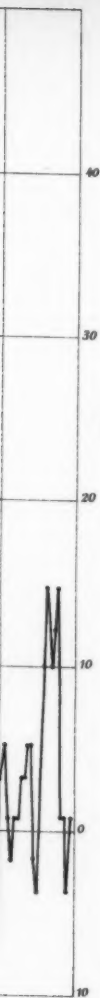
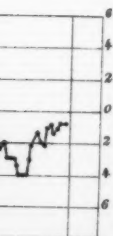
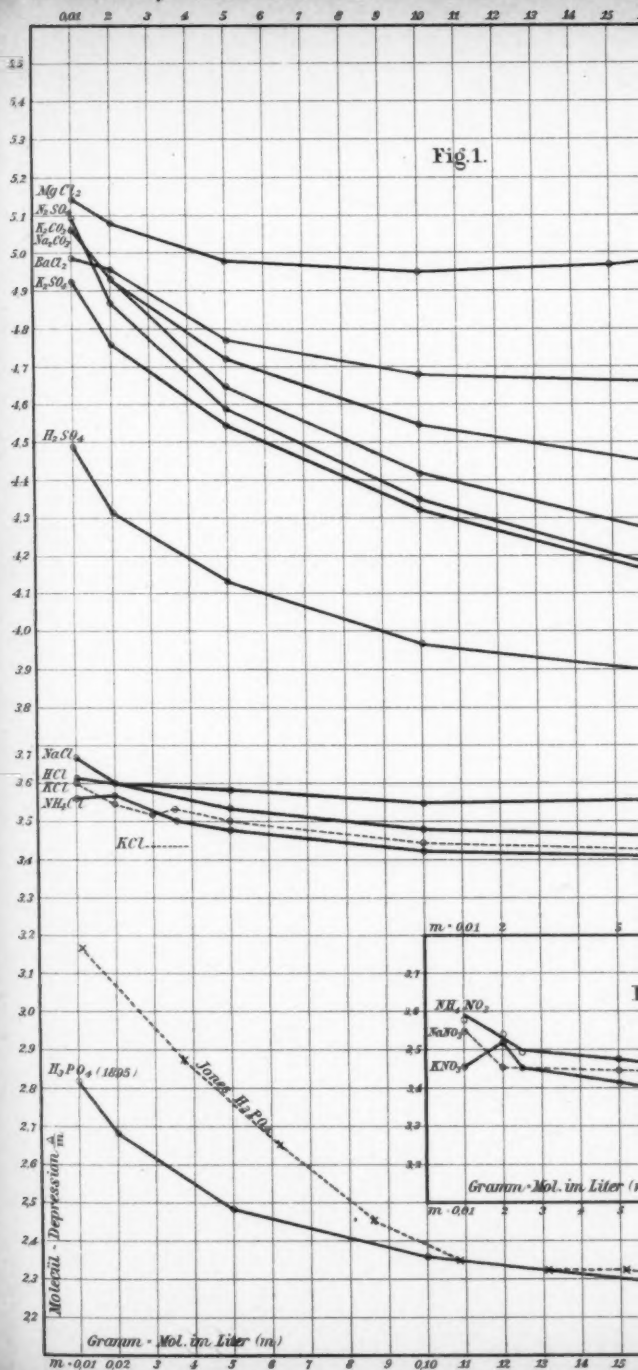
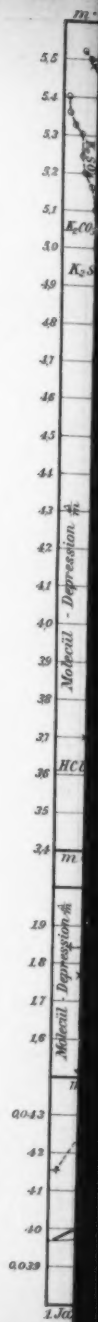
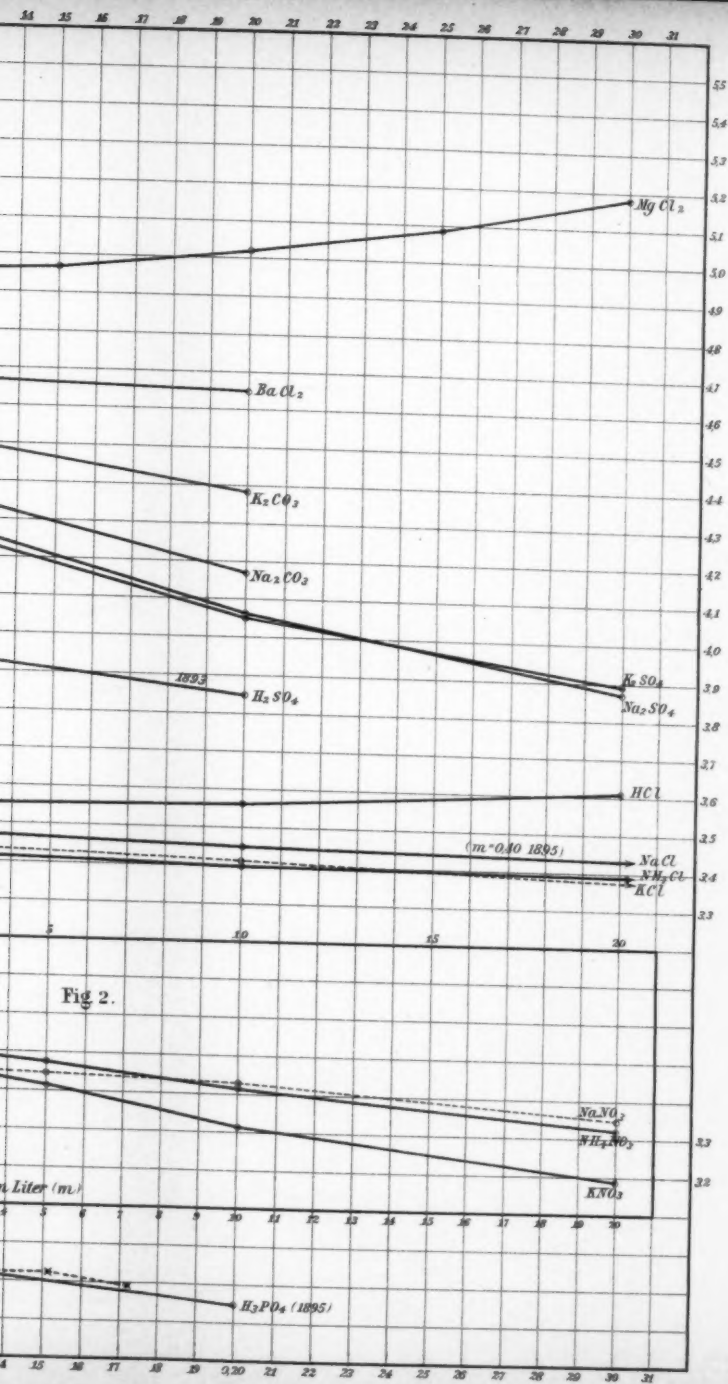
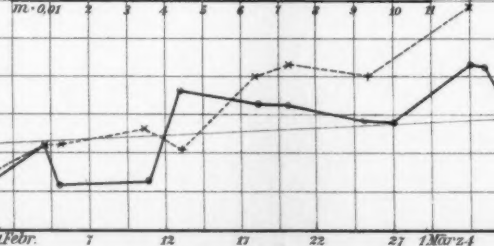
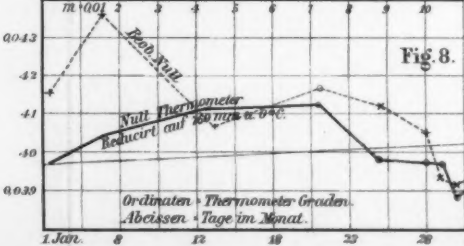
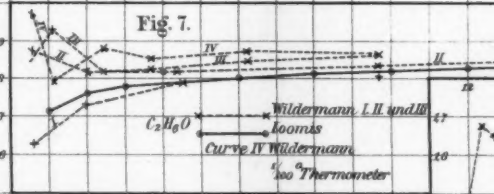
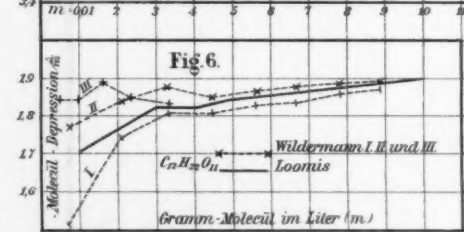
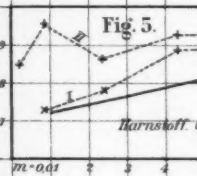
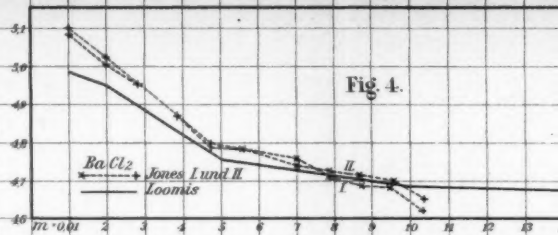
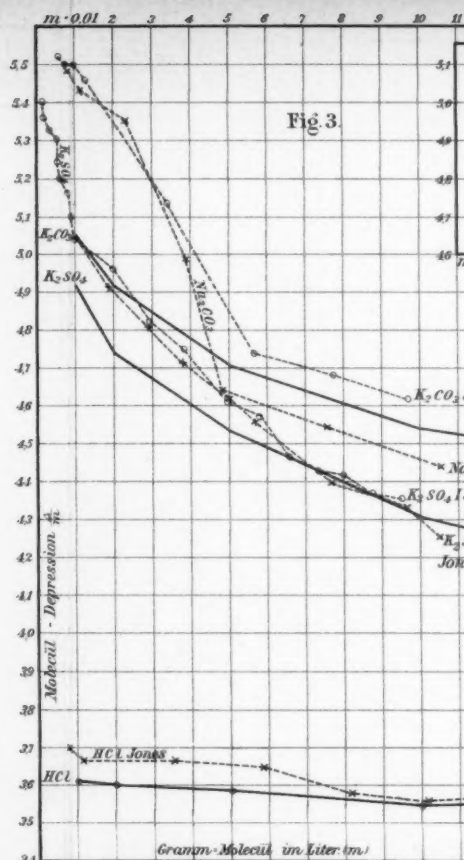


Fig. 8.









Loomis Fig. 1-8.

